Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Шамсутдинов Расим Адегамович
Должность: Директор ЛФ КНИТУ-КАИ
Дата подписания: 30.12.2020 16:09:46
Уникальный программный ключ:
d31c25eab5d6fbb0cc50e03a64dfdc00329a085e3a993ad1080663082c961114

Методические указания к практическим занятиям

по дисциплине Эконометрика

направление 38.03.01 Экономика

Примеры решения практических заданий

Задача 1.1. Используя данные таблицы 1.1, постройте поле корреляции, предположите наличие связи между признаками и определите ее вид.

Решение: Упорядочим исходные данные по факторному (Х) признаку, выберем масштаб и отобразим на координатной плоскости в виде поля корреляции, где по оси абсцисс — стоимость основных фондов (ОПФ сельскохозяйственных предприятий (СХП), по оси ординат — стоимость продукции сельского хозяйства.

По расположению точек можно предположить наличие прямолинейной корреляционной связи. Проведите перпендикулярные оси через точку с координатами ($x_{средн}$, $y_{средн}$) и посчитайте количество точек в I, III четвертях (они определяют положительный вклад в ковариацию), и в IV, II четвертях (они определяют отрицательный вклад в ковариацию). Каких точек больше, такое направление имеет линия. На рисунке больше точек с прямой связью, поэтому направление предполагаемой линии – вверх. Проведите эту прямую, располагая её так, чтобы точка ($x_{средн}$, $y_{средн}$) принадлежала прямой.

Таблица 1.1
Данные о стоимости ОПФ СХП и стоимости производимой ими продукции сельского хозяйства, млн. руб.

№ п/п	Стоимость основных фондов	Стоимость продукции
	X	Y
1	195,1	31,9
2	259,9	32,7
3	107,9	89,2
4	195,4	64,9
5	124,6	57,8
6	163,2	93,1
7	101,3	91,6
8	105,1	84,6
9	204,3	81,1
10	240,5	74,5
11	159,8	95,8
12	243,9	125,1
13	244,9	153,8
14	127,5	55,1
|15	168,6	55,3
16	102,6	57,6
17	149,4	42,6
18	182,1	123,5
19	182,8	97,7
20	210,5	160,9
21	203,4	127,5
22	209,4	172,1
23	102,5	55,4
24	204,4	148,9

Таблица 1.2
Данные об урожайности зерн. культур (У) и обеспеченности СХП комбайнами (Х)

№ п/п	Y, ц/га	X, на 1000 га, шт.
1	27,8	2,5
2	19,3	1,0
3	29,8	3,7
4	25,2	2,3
5	32,9	2,7
6	32,1	2,9
7	36,7	2,4
8	25,9	0,7
9	35,5	3,6
10	30,5	1,9
11	32,0	2,6
12	38,0	3,5
13	39,0	2,5
14	28,4	2,9
15	26,3	3,2
16	26,4	2,3
17	28,5	2,6
18	42,5	3,5
19	41,3	3,4
20	31,7	3.5
21	32,1	2,1
22	44,3	3,1
23	32,6	2,9
24	37,7	3,2
25	31,1	2,5

Таблица 1.2.1 Сортировка данных по Х и определение номера интервала по У

№ п/п	X на 1000 га, шт	Y, ц/га	№ интервала по (У)
8	0,7	25,9	2
2	1	19,3	1
10	1,9	30,5	3
21	2,1	32,1	3
26	2,2	27,2	2
4	2,3	25,2	2
16	2,3	26,4	2
7	2,4	36,7	4
1	2,5	27,8	2
13	2,5	39	4
25	2,5	31,1	3
11	2,6	32	3
17	2,6	28,5	2
5	2,7	32,9	3
6	2,9	32,1	2
14	2,9	28,4	3
23	2,9	32,6	3
22	3,1	44,3	5
15	3,2	26,3	2
24	3,2	37,7	4
19	3,4	41,3	5
12	3,5	38	4
18	3,5	42,5	5
20	3,50	31,7	3
9	3,6	35,5	4

25	115,7	50,7	26	27,2	2,2	3	3,7	29,8	4

Таблица 1.2.2

Группы по Х	Приходится зерноуборочных комбайнов на 1000га посевов зерновых, шт.	Урожайность зерновых культур в сельхозпредприятиях, ц\га (группы по У)					Всего районов
		19,3-24,3	24,3-29,3	29,3-34,3	34,3-39,3	39,3-44,3	
		Средние значения интервалов по У					
		21,8	26,8	31,8	36,8	41,8	
1	0,7-1,3	1	1				2
2	1,3-1,9			1			1
3	1,9-2,5		4	2	2		8
4	2,5-3,1		2	4		1	7
5	3,1-3,7		1	2	3	2	8
Итого		1	8	9	5	3	26

Задачи для самостоятельного решения

Задания 1.4 и 1.5 на примере задачи 1.1.

Задача 1.4. Используя графический метод, по данным таблицы 1.4 предположите наличие связи между признаками и определите ее форму.

Задача 1.5. Используя графический метод, по данным таблицы 1.5 предположите наличие связи между признаками и определите ее форму.

Таблица 1.4
Данные об индексе физического объема инвестиций (Х) и стоимости сельхоз. Продукции (У) в 2010г. в разрезе 26 районов

№ Района	X	Y
1	200,0	1908,1
2	141,9	1333,5
3	220,0	1699,0
4	280,0	2033,2
5	64,1	2416,2
6	145,7	1262,1
7	89,3	2451,6
8	49,6	2878,3
9	127,2	1782,3
10	116,3	2902,2
11	110,0	3158,0
12	66,9	1478,8
13	270,0	1969,7
14	138,6	1219,5
15	159,5	1796,9
16	340,0	3787.3
17	165,4	1878,7
18	131,0	2432.1
19	129,0	2248,8
20	230,0	2496,9
21	250,0	1208,6
22	320,0	2441,6
23	162,6	1432,1
24	87,5	4046,8
25	84,3	1908,1

Таблица 1.5
Данные об уровне рентабельности(Х) и урожайности зерновых культур (У) СХТП в 2009 г. в 26 районах

№ Района	X	Y
1	-5,4	27,8
2	-11,3	19,3
3	6,7	29,8
4	13,1	25,2
5	16,7	32,9
6	14,8	32,1
7	10,9	36,7
8	-10,4	25,9
9	15,0	35,5
10	15,3	30,5
11	15,3	32,0
12	12,4	38,0
13	17,6	39,0
14	43,4	28,4
15	39,8	26,3
16	6,1	26,4
17	16,4	28,5
18	9,4	42,5
19	40,0	41,3
20	7,1	31,7
21	6,1	32,1
22	27,6	45,2
23	2,4	32,6
24	9,9	37,7
25	15,2	31,1

26	116,1	1333,5		26	10,0	27,2

Задача 1.2.Имеются данные (табл. 1.2) об урожайности зерновых культур (У) в 26 регионах и обеспеченности сельхозтоваропроизводителей (СХТП) комбайнами (Х). Определите вид корреляционной зависимости между рассматриваемыми признаками на основании эмпирической регрессии.

Решение: Эмпирическая регрессия строится по данным аналитической или комбинационной группировок и представляет собой зависимость групповых средних значений признака-результата (У) от групповых средних значений признака-фактора (Х).

Проведём аналитическую группировку данных. Для этого сначала упорядочим исходную совокупность по признаку-фактору (Х) (табл. 1.2.1), затем найдём разность между максимальным и минимальным значением фактора Х: (3,7- 0,7 = 3). Число 3 удобно разбить на 5 или на 6 интервалов. Разобьём на 5, т.е. 3:5 = 0,6 (длина одного интервала из пяти).

Рассчитаем интервалы для признака-фактора (Х) :

от 0,7 до 1,3, от 1,3 до 1,9, от 1,9 до 2,5, от 2,5 до 3,1, от 3,1 до 3,7.

Аналогично, рассчитаем 5 интервалов для У:

19,3-24,3; 24,3-29,3; 29,3-34,3; 34,3-39,3; 39,3-44,3.

Результаты аналитической группировки представлены в таблице 1.2.2.

Групповые средние по признаку-фактору (Х) определяются как серединные значения интервалов, а по признаку-результату (У) — по формуле средней арифметической взвешенной из серединных значений интервалов (сумма произведений среднего У на количество У для этого Х, делённая на общее количество У для этого Х), например (см. табл.1.2.2):

для первого интервала по Х: (21,8·1+26,8·1):2= 24,3

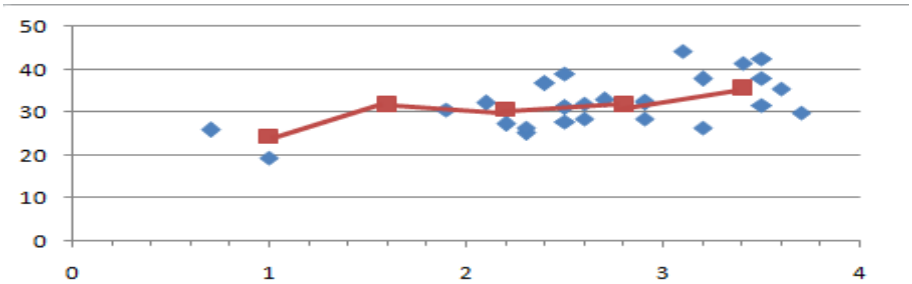
для второго интервала по Х: (31,8·1):1= 31,8

для третьего интервала по Х: (26,8·4+31,8·2+36,8·2):8= 30,6 и т.д.

Таким образом, были получены следующие групповые средние:

$\overline{X}$	1	1,6	2,2	2,8	3,4
$\overline{y}$	24,3	31,8	30,6	31,8	35,6

Отобразим в одной координатной плоскости поле корреляции по исходным данным и эмпирическую линию регрессии (ломаная, соединяющая 5 точек по групповым средним признака-фактора и признака-результата). В соответствии с полученными результатами можно предположить наличие тесной, прямолинейной зависимости урожайности от обеспеченности предприятий комбайнами.



В задачах 1.6 и 1.7 (на примере 1.2) необходимо определить вид корреляционной зависимости между рассматриваемыми признаками на основании эмпирической регрессии (зависимость групповых средних значений признака-результата (У) от групповых средних значений признака-фактора (Х)) и изобразить на координатной плоскости поле корреляции по исходным данным и эмпирическую линию регрессии. Количество интервалов выбираете на своё усмотрение.

Задача 1.6. Имеются данные (таб.1.6) об объеме продукции животноводства (Х) в регионе и фактическом потреблении мясных продуктов в расчете на 1 человека (Y).

Задача 1.7. Имеются данные об уровне рентабельности сельхозпредприятий (Х) и размерах среднемесячной заработной платы работников (У) (таб.1.7).

Задача 1.3. Произведите механическое выравнивание динамического ряда, характеризующего изменение стоимости продукции сельского хозяйства за период 2000-2014г методом трехлетних укрупненных интервалов и трехлетней скользящей средней. Отобразите графически результаты выравнивания, сделайте выводы.

Таблица 1.3 Динамика стоимости продукции сельского хозяйства (У) в регионе, млнруб

Год	У	Год	У
2000	331,9	2008	814,1
2001	323,7	2009	741,5
2002	859,2	2010	953,8
2003	614,9	2011	1253,1
2004	587,8	2012	533,8
2005	931	2013	655,1
2006	201,6	2014	515,3
2007	384,6		

Решение: Метод укрупненных интервалов основан на укрупнении периодов времени, к которым относятся уровни ряда (например, за три года), при этом одновременно уменьшается количество интервалов. Для каждого образованного таким образом периода рассчитывается свой показатель уровня ряда, обычно средняя величина.

Таблица 1.3.1 Расчетная таблица трехлетней скользящей средней, млн руб.

Год	Продукция сельс/хозяйства	Трехлетние суммы	Трехлетняя средняя	Трехлетние скользящие суммы	Трехлетняя скользящая средняя
1	2	3	4	5	6
2000	331.9	—	—	—	—
2001	323,7	1514,80	504,93	1514,80	504,93
2002	859,2	—	—	1797,80	599,27
2003	614,9	-	-	2061,90	687,30
2004	587,8	2133,70	711,23	2133,70	711,23
2005	931	—	-	1720,40	573,47
2006	201,6	-	-	1517,20	505,73
2007	384,6	1400,30	466,77	1400,30	466,77
2008	814,1	—	-	1940,20	646,73
2009	741,5	—	-	2509,40	836,47
2010	953,8	2948,40	982,80	2948,40	982,80
2011	1253,1	-	-	2740,70	913,57
2012	533,8	—	-	2442,00	814,00
2013	655,1	1704,20	568,07	1704,20	568,07
2014	515,3	-	-	-	-

Сначала определим общую сумму продукции сельского хозяйства по каждому из

трехлетних периодов (таблица 1.3.1, графа 3), а затем среднее значение за три года (гр.4)

Метод скользящей средней предполагает формирование укрупненных интервалов, состоящих из одинакового числа уровней. Каждый последующий интервал получаем, сдвигаясь на один уровень вниз. Трехлетние скользящие суммы приведены в графе 5. Скользящие трехлетние средние определены делением трехлетних сумм на 3 (гр. 6).

Фактические значения и результаты выравнивания (гр. 2, 4, 6) представьте на одном графике в виде трех различных по типу ломаных линий.

На примере задачи 1.3.

Задача 1.8. Проведите механическое выравнивание динамического ряда для результативной переменной методом укрупнения интервалов и методом простой скользящей средней, основываясь на данных таблицы 1.8. Фактические значения и результаты выравнивания представьте на одном графике в виде трех различных по виду ломаных линий.

Задача 1.9. Проведите механическое выравнивание динамического ряда для результативной переменной методом укрупнения интервалов и методом простой скользящей средней, основываясь на данных таблицы 1.9. Фактические значения и результаты выравнивания представьте на одном графике в виде трех различных по виду ломаных линий.

Таблица 1.6

Данные об объеме продукции животноводства (X) в регионе и потреблении мясных продуктов в расчете на 1 человека (Y)

№ Район	X	У
1	390,1	51,0
2	923,1	51,5
3	404,3	51,6
4	567,9	51,3
5	573,7	51,7
6	865,4	51,8
7	500,8	55,8
8	839,3	51,8
9	1093,6	51,9
10	674,5	51,6
11	1189,6	52,2
12	739,3	52,1
13	473,5	51,9
14	827,6	52,5
15	395,8	51,9
16	605,7	51,8
17	901,1	52,1
18	619,2	51,4
19	752,3	52,2
20	1031,9	51,7
21	780,4	52,4
22	414,7	51,7
23	918,6	51,9
24	481,4	51,3
25	743,2	51,6

Таблица 1.7

Данные об уровне рентабельности сельхозпредприятий (X) и размерах среднемесячной зарплаты работников (У).

№ Район	У	X
1	5460	11,3
2	2803	6,7
3	3164	13,1
4	3892	16,7
5	2831	14,8
6	4831	10,9
7	3932	10,4
8	5584	15,0
9	3749	15,3
10	5074	15,3
11	4644	12,4
12	3861	17,6
13	3530	23,4
14	3395	20,9
15	4713	6,1
16	5620	16,4
17	4003	9,4
18	3475	22,6
19	4317	7,1
20	5260	6,1
21	3832	18,5
22	3163	2,4
23	4275	9,9
24	3139	15,2
25	5186	10,0

Таблица 1.8

Период	Стоимость ОПФ, млн.

Таблица 1.9

Период	Валовая продукция СХТП

	руб.			региона, млн. руб
1997	40182		1997	9516
1998	37977		1998	7682
1999	34512		1999	8778
2000	25128		2000	9174
2001	24581		2001	15605
2002	21767		2002	19636
2003	20763		2003	24828
2004	19291		2004	27068
2005	18134		2005	30174
2006	18377		2006	46280
2007	18525		2007	45393
2008	20142		2008	52159

Примеры решения задач

Задача 2.1. По данным о стоимости основных производственных фондов в регионе необходимо определить индивидуальные и средние показатели динамики, сделать выводы.

Решение: По формулам (2.1) – (2.3), представленным в теоретической части раздела, рассчитаем индивидуальные показатели динамики временного ряда, представленного в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Показатели динамики средних цен реализации продукции на предприятии с 1999-2013 гг.

Год	Средние цены реализации продукции	Абсолютный прирост, руб.		Темп роста, %		Темп прироста, %	
		базисный	цепной	базисный	цепной	Базисный	цепной
2000	125						
2001	321	196	196	256,8	256,8	156,8	156,8
2002	499	374	178	399,2	155,5	299,2	55,5
2003	787	662	288	629,6	157,7	529,6	57,7
2004	952	827	165	761,6	121,0	661,6	21,0
2005	1587	1462	635	1269,6	166,7	1169,6	66,7
2006	1987	1862	400	1589,6	125,2	1489,6	25,2
2007	2587	2462	600	2069,6	130,2	1969,6	30,2
2008	3966	3841	1379	3172,8	153,3	3072,8	53,3
2009	2148	2023	-1818	1718,4	54,2	1618,4	-45,8
2010	2874	2749	726	2299,2	133,8	2199,2	33,8
2011	3165	3040	291	2532	110,1	2432,0	10,1
2012	3947	3822	782	3157,6	124,7	3057,6	24,7
2013	4654	4529	707	3723,2	117,9	3623,2	17,9
Сумма	29599	27849	4529	23579,2	1807,1	22279,2	507,1
Среднее	2114,2	2142,2	348,4	1813,8	139,0	1713,8	39,0

Задача 2.2. Постройте интерполяционную функцию на основе решетчато заданной функции, принимающую в данных точках $\mathbf{x_0=1,\ x_1=3,\ x_2=6}$, значения функции $\boldsymbol{y_0=10,\ y_1=16,\ y_2=4}$. Найдите значения функции в точках $x = \boldsymbol{2{,}5;\ 4{,}2;\ 5{,}7}$.

Решение: Построим интерполяционную функцию $L_2(x)$:

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \cdot y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \cdot y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \cdot y_2 =$$

$$= \frac{(x-3)\cdot(x-6)}{(1-3)\cdot(1-6)}\cdot 10 + \frac{(x-1)\cdot(x-6)}{(3-1)\cdot(3-6)}\cdot 16 + \frac{(x-1)\cdot(x-3)}{(6-1)\cdot(6-3)}\cdot 4 =$$

$$=(x^2-9x+18)\cdot\frac{10}{10} + (x^2-7x+6)\cdot\frac{16}{-6} + (x^2-4x+3)\cdot\frac{4}{15} =$$

$$= \left(1-\frac{16}{6}+\frac{4}{15}\right)x^2 + \left(-9+7\cdot\frac{16}{6}-4\cdot\frac{4}{15}\right)x + 18 + 6\cdot\frac{16}{-6} + 3\cdot\frac{4}{15}$$

$$= \mathbf{-1.4x^2 - 8.6x + 2.8}$$

Найдем значения полинома в точках: $L_2(2.5) = 15.55$, $L_2(4.2) = 14.224$, $L_2(5.7) = 6.334$.

Задача 2.3. Дана функция $y = \sqrt{x}$, известны три узла интерполяции: Необходимо оценить погрешность интерполяции функции при x = 115; 127; 134.

X	81	121	144
Y	9	11	12

Решение: Для определения погрешности интерполяции в точке $x \in [x_0;\ x_n]$ в соответствии с формулой (2.6) необходимо сначала найти производную (n+1)-порядка (в этом случае третьего) исходной функции $y = \sqrt{x}$: $y''' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)''' = \cdots = \frac{3}{8}\cdot x^{\frac{-5}{2}}$

Полученная производная представляет собой обратную зависимость, поэтому максимальное значение функции на отрезке [81; 144] будет при минимальном значении аргумента, т. е. при x = 81: $M_{max} = \frac{3}{8}\cdot 81^{\frac{-5}{2}} = \frac{3}{8}\cdot 9^{-5} = 0{,}375\cdot 9^{-5}$

На завершающем этапе оценим погрешность интерполяции функции:

при x= 115: $R(115) = |f(x) - L_n(x)| \le \frac{Mmax}{3!}\cdot|115-81|\cdot|115-121|\cdot|115-144| = 369{,}75\cdot 9^{-5}$;

при x=127: $R(127) \le \ldots 293{,}25\cdot 9^{-5}$;

при x=134: $R(134) \le \ldots 430{,}625\cdot 9^{-5}$

Задачи для самостоятельного решения

На примере задачи 2.1

Задача 2.4. По данным временного ряда об уровне рентабельности продукции в сельском хозяйстве в регионе необходимо рассчитать индивидуальные и средние показатели динамики, сделать выводы.

Задача 2.5. По данным временного ряда об инвестициях в сельское хозяйство региона необходимо рассчитать индивидуальные и средние показатели динамики, сделать выводы.

Задача 2.6. Имея данные о фондовооруженности труда в сельхозпредприятиях за 11 лет в регионе, необходимо рассчитать индивидуальные и средние показатели динамики, сделать выводы.

Таблица 2.4. Уровень рентабельности производства продукции отрасли (У) за период 1998-2008 гг., млн руб.

Период	(У)
1998	14.6
1999	60.4
2000	58.8

Таблица 2.5. Инвестиции в сельское хозяйство (У) региона за период 1998-2008 гг., млн руб

Период	(У)
1998	397,7
1999	584,3
2000	808,0

Таблица 2.6. Фондовооруженность труда (У) в СХТП региона за период 1998-2008 гг., тыс. руб.

Период	(У)
1998	201,4
1999	185,0
2000	147,4

2001	52,8
2002	34,3
2003	41,6
2004	47,1
2005	24,1
2006	40,1
2007	59,8
2008	37,4

2001	2745,1
2002	2842,0
2003	3440,1
2004	3662,5
2005	3461,9
2006	3957,6
2007	4132,1
2008	4067,2

2001	154,4
2002	152,8
2003	166,1
2004	193,0
2005	209,8
2006	226,1
2007	237,4
2008	260,9

На примере задачи 2.2

Задача 2.7. Постройте интерполяционную функцию, принимающую в точках $x_0 = -3$, $x_1 = 2$, $x_2 = 7$ заданные значения функции $y_0 = 8$, $y_1 = -4$, $y_2 = 6$. Найдите значения функции в точках x ***= 2,5; 4,2; 5,7.***

Задача 2.8. Найдите многочлен наименьшей степени, принимающий в данных точках $x_0 = -1$, $x_1=3$, $x_2=7$ значения функции $y_0 = -4$; $y_1= -6$; $y_2 = 24$. Найдите значения этой функции в точках x ***= 2,5; 4,2; 5,7***

Задача 2.9. Используя интерполяционный метод Лагранжа, найдите функцию, принимающую в точках $x_0 = 1$, $x_1 = -4$, $x_2 = 7$ заданные значения функции $y_0 = -11$, $y_1 = 5$, $y_2 = 12$. Найдите значения функции в точках x ***= 2,5; 4,2; 5,7***

Задача 2.10. Постройте интерполяционную функцию по значениям решетчато заданной функции:

X	–4	3	6
Y	12,1	22,3	27,6

Найдите значения функции в точках x ***= 2,5; 4,2; 5,7***

Задача 2.11. Оцените интерполяционную функцию по ее таблично заданным значениям:

X	1	3	6
Y	11,6	21,2	17,6

Найдите значения функции в точках x ***= 2,5; 4,2; 5,7***

Задача 2.12. Постройте интерполяционную функцию по значениям таблично заданной функции:

X	6	3	2
Y	10,6	12,5	22,6

Найдите значения функции в точках x ***= 2,5; 4,2; 5,7***

На примере задачи 2.3

Задача 2.13*. Синтезируйте интерполяционную функцию, принимающую в точках $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 6$ заданные значения функции $y_0 = -1$, $y_1 = -3$, $y_2 = 3$, $y_3 = 157$. Оцените погрешность интерполяции в точках: x = 4; x = 9.

Задача 2.14*. Постройте многочлен наименьшей степени, принимающий в точках $x_0 = 0$, $x_1=1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 6$ значения функции $y_0 = 4$, $y_1 = 9{,}9$, $y_2 = 18{,}8$, $y_3 = 240{,}4$. Оцените погрешность интерполяции в точках: x = 7; x =11.

Задача 2.15. Дана функция $y = \sqrt{x}$, известны три узла интерполяции:

X	49	121	169
Y	7	11	13

Оцените погрешность интерполяции функции при x =15; x =77; x =139.

Задача 2.16.Дана функция $y = \sqrt[3]{x}$, известны три узла интерполяции:

X	8	125	729
Y	2	5	9

Оцените погрешность интерполяции функции при x =13; x =237.

Задача 2.17. Дана функция y = $\sqrt[2]{x^5}$, известны три узла интерполяции:

X	4	9	16
Y	32	243	1024

Оцените погрешность интерполяции функции при x = 2; x =5; x =7.

Примеры применения методов линеаризации

Задача 3.1. По данным 26 муниципальных районов региона о стоимости продукции сельского хозяйства (У) и стоимости основных фондов *(X)* оценить параметры парных уравнений регрессии следующего вида:

а) линейной $y_x = a_0 + a_1 x$;

б) степенной $y_x = a_0 \cdot x^{a_1}$

в) показательной $y_x = a_0 \cdot a_1^{\,x}$;

г) логарифмической $y_x = a_0 + a_1 \cdot lgx$.

Таблица 3.1

Данные о стоимости основных фондов (X) и собственной продукции (У) в 26 районах, млн руб.

№ района	X	Y	№ района	X	Y
1	201,6	1011,3	14	655,1	1278,5
2	242,6	1490,4	15	720,1	2091,4
3	255,4	1024,5	16	741,5	2403,5
4	323,7	559,9	17	760,9	2010
5	331,9	1195,1	18	814,1	2042,3
6	384,6	1050,1	19	859,2	1607,9
7	397,7	1482,8	20	931	1683,2
8	450,7	1151,7	21	953,8	1529
9	457,6	1020,6	22	1092,6	3063,9
10	515,3	1648	23	1148,9	2048,4
11	533,8	2441,9	24	1247,5	2034,4
12	587,8	1424,6	25	1253,1	2435,9
13	614.9	1095,4	26	1873,5	3082,1

Решение:

а) линейная регрессия $\boldsymbol{y_x = a_0 + a_1 x}$.

Для определения параметров уравнения линейной парной регрессии необходимо решить следующую систему нормальных уравнений, полученную МНК:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum x_i = \sum y_i \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i. \end{cases}$$

Таблично определим значения сумм:

Таблица 3.2. Расчётная таблица для модели линейной регрессии					
	x	y	x·y	x^2	Y(x)
Сумма итого	18348,9	43906,8	35838726	16776598	43906,8

В результате получим следующую систему нормальных уравнений для оценки параметров a_0и a_1:

$$\begin{cases} 26a_0 + 18348{,}9a_1 = 43906{,}8, \\ 18348{,}9a_0 + 16776598a_1 = 35838726, \end{cases}$$

решив которую методом сложения (вычитания) или подстановки, получим следующие значения параметров: $\boldsymbol{a_0 = 793{,}95, a_1 = 1{,}2679}$. Таким образом, уравнение линейной парной регрессии имеет вид: $\mathrm{Y(x)} = \boldsymbol{793{,}95 + 1{,}2679x}$.

В заключение рассчитаем теоретические значения результативной переменной *y(x),*

подставляя исходные значения факторной переменной в полученное уравнение регрессии. При этом сумма исходных данных по Y должна равняться сумме выровненных, как это показано в таблице 3.2: $\sum y_i = \sum Y_{xi}$;

б) степенная парная регрессия $\boldsymbol{y_x = a_0 * x^{a_1}}$.

Таблица 3 .3 Расчетная таблица для модели степенной парной регрессии							
№ 1-26	x	y	X	Y	X·Y	X^2	Y(x)
Итого	18348,9	43906,8	72,4079	83,0944	232,1989	203,1501	42549,39

Путем логарифмирования по основанию 10 обеих частей исходного уравнения $\lg(y) = \lg(a_0 * x^{a_1})$ приведем его к линейному виду: $lgy = lga_0 + a_1 lgx$. Введем новые условные переменные, заменяя в уравнении переменные $lgy = Y$, $lg\, a_0 = A_0$, $\lg x = X$, получим однофакторное (парное) уравнение линейной регрессии $Y = A_0 + a_1 X$, параметры которого получим из следующей системы:

$$\begin{cases} nA_0 + a_1 \sum X = \sum У \\ A_0 \sum X + a_1 \sum X^2 = \sum XУ \end{cases}$$

Для ее решения сначала в расчетной таблице 3.3 вычислим необходимые значения сумм. Решая систему относительно A_0 и a_1, имеем

$$\begin{cases} 26A_0 + 72{,}4079a_1 = 83{,}0944, \\ 72{,}4079A_0 + 203{,}1501a_1 = 232{,}1989. \end{cases}$$

Отсюда $A_0 = 1{,}7334$, $\boldsymbol{a_1 = 0{,}5252}$.Проведем потенцирование для a_0:$a_0 = 10^{A_0}$, $\boldsymbol{a_0 = 54{,}129}$. Известные значения параметров подставим в уравнение степенной регрессии: Y(x) $= \boldsymbol{54{,}129 \cdot x^{0{,}5252}}$. Определим теоретические (расчетные) значения результативного показателя y(x) в таблице 3.3; сделаем выводы об ошибке регрессии.

в) показательная регрессия: $\boldsymbol{y_x = a_0 * a_1^x}$.

Таблица 3.4 Расчётная таблица для модели показательной парной регрессии						
№ 1-26	x	y	Y	Y*x	X^2	Y(x)
сумма	18348,9	43906,8	83,0944	59882	16776598	42720

Путем логарифмирования обеих частей уравнения приведем его к линейному виду:

$\lg(y) = \lg(a_0 * a_1^x)$, отсюда $lgy = lga_0 + x \cdot lga_1$.

Введем новые условные переменные: $\lg y = Y$, $lga_0 = A_0$, $lga_1 = A_1$.

Получим однофакторное уравнение линейной регрессии $Y = A_0 + A_1 x$, параметры которого получим из системы, рассчитав для этого в таблице 3.4 необходимые значения сумм:

$$\begin{cases} nA_0 + A_{1\sum x} = \sum У \\ A_{0\sum x} + A_{1\sum x^2} = \sum Yx \end{cases}$$

Решая систему относительно A_0 и A_1, имеем

$$\begin{cases} 26A_0 + 18348{,}9A_1 = 83{,}0944, \\ 18348{,}9A_0 + 16776598A_1 = 59882. \end{cases}$$

Отсюда A_0= 2,9673, A_1= 0,0003039. Проведем потенцирование для параметров a_0 и a_1: $a_0 = 10^{A_0}, \boldsymbol{a_0 = 927{,}452}, a_1 = 10^{A_1}, \boldsymbol{a_1 = 1{,}0007}$. Эти значения параметров подставим в уравнение показательной регрессии: Y(x) $= \boldsymbol{927{,}432 \cdot 1{,}0007}^x$. Определим теоретические (рассчетные) значения результативного показателя в таблице 3.4, сделаем выводы об ошибке показательной регрессии.

г) логарифмическая регрессия: $\boldsymbol{y_x = a_0 + a_1 lgx}$.

Таблица 3.5 Расчетная таблица для модели логарифмической парной регрессии						
№ 1-26	x	y	X	y·X	X^2	Y(x)
сумма	18348,9	43906,8	72,4079	125231,0829	203,1501	43906,8

Для определения параметров модели логарифмической регрессии $y_x = a_0 + a_1 lgx$введем новую условную переменную $lgx = X$, получим однофакторное уравнение линейной регрессии Y(x)=a_0+a_1 X, параметры которого получим из системы

$$\begin{cases} nA_0 + A_1\sum x = \sum y \\ A_0\sum y + A_1\sum x^2 = \sum xy \end{cases}$$

Решая систему относительно a_0 и a_1, рассчитав необходимые суммы в таблице 3.5, получим

$$\begin{cases} 26a_0 + 72{,}4079a_1 = 43906{,}8 \\ 72{,}4079a_0 + 203{,}1501a_1 = 125231{,}0829 \end{cases}$$

Отсюда $\boldsymbol{a_0}$ **= -3796,6** $\boldsymbol{a_1}$**= 1969,67**. Известные значения параметров подставим в уравнение логарифмической регрессии: $\boldsymbol{y_x}$**= -3796,6 +1969,67** $\boldsymbol{\cdot lgx}$. Определим теоретические (расчетные) значения результативного показателя в таблице 3.5.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.3**.** Для линейного *парного уравнения* регрессии при 12 наблюдениях известны следующие значения: $\sum x = 15, \sum x^2 = 85, \sum yx = 125, \sum y = 58, \sum y^2 = 120$.Определите параметры уравнения регрессии.

Задача 3.4. Для гиперболического парного уравнения регрессии, при 10 наблюдениях известны следующие значения: $\sum \frac{1}{x} = 15, \sum \frac{1}{x^2} = 85, \sum \frac{y}{x} = 125, \sum y$=58, $\sum \frac{1}{y^2} = 120$. Определите параметры уравнения регрессии.

Задача 3.5**.** Для уравнения линейной парной регрессии при 15 наблюдениях известны следующие значения: $\sum x = 15, \sum x^2 = 85, \sum yx = 125, \sum y = 58, \sum y^2 = 120$. Рассчитайте параметры уравнения регрессии методом определителей.

Задача 3.6. Определите параметры уравнения регрессии на основе степенной функции, для 9 наблюдений, если известны следующие значения сумм:

$\sum \log x = 15, \sum (\log x)^2 = 85, \sum \log y \cdot \log x = 125, \sum \log y = 58.$

Задача 3.7.Определите параметры парного уравнения регрессии, на основе показательной функции, для 10 наблюдений, если известны следующие значения:

$$\sum \log x = 15, \sum (\log x\ )\text{^}2 = 85, \sum \log y \cdot \log x = 125, \sum \log y = 58$$

Задача 3.8.Для парного уравнения регрессии, аппроксимированного логарифмической функцией, для 18 наблюдений известны следующие значения:

$\sum \log x = 35{,}6, \sum (\log x^2) = 85{,}2, \sum y \cdot \log x = 323, \sum y = 58, \sum y^2 = 120.$ Найдите параметры уравнения регрессии методом определителей.

Задача 3.9.По данным таблицы 3.9 оценить параметры уравнений регрессии следующего вида:
а) линейной $y_x = a_0 + a_1 x$,
б) степенной $y_x = a_0 \cdot x^{a_1}$.

Задача 3.10**.** По данным таблицы 3.10 оценить параметры уравнений регрессии:
а) линейной $y_x = a_0 + a_1 x$,
б) равносторонней гиперболы $y = a_0 + a_1 \cdot \frac{1}{x}$

Задача 3.11**.** По данным таблицы 3.11оценить параметры уравнений регрессии:
а) линейной $y_x = a_0 + a_1 x$;
б) показательной $y_x = a_0 * a_1^x$.

Таблица 3.9

№	Y	X
1	141,9	320,7
2	64,1	282,1
3	89,3	318,5

Таблица 3.10

№	X	Y
1	116,38	-12,6
2	181,36	-9,9
3	108,19	-14,8

Таблица 3.11

№	X	Y
1	718,8	141,9
2	1216,8	64,1
3	864,2	145,7

4	49,6	268,5
5	116,3	282,8
6	110,0	295,6
7	66,9	339,9
8	138,6	262,8
9	159,5	276,6
10	131,0	321,5
11	129,0	290
12	87,5	313,3
13	84,3	259,4
14	116,1	282,6

4	117,23	85,7
5	92,09	55,6
6	107,06	14,6
7	125,99	15,5
8	100,00	32,2
9	100,85	13,5
10	148,31	66,4
11	94,35	8,8
12	94,92	32,2
13	111,22	47,9
14	155,54	25,8

4	580,4	89,3
5	549,8	49,6
6	1250,0	116,3
7	1579,3	110,0
8	2052,6	66,9
9	894,0	138,6
10	886,7	159,5
11	495,6	129,0
12	321,0	162,6
13	1377,7	87,5
14	520,4	84,3

Задача **3.12.** По данным таблицы 3.12 оценить параметры уравнений регрессии вида:
а) линейной $y_x = a_0 + a_1 x$;
б) логарифмической $y_x = a_0 + a_1 \lg x$;
в) показательной $y_x = a_0 * a_1^x$;
г) равносторонней гиперболы $y_x = a_0 + \frac{a_1}{x}$

Задача 3.13. По данным таблицы 3.13 оценить параметры уравнений регрессии вида:
а) линейной $y_x = a_0 + a_1 x$;
б) показательной $y_x = a_0 * a_1^x$;
в) логарифмической $y_x = a_0 + a_1 \lg x$;
г) степенной $y_x = a_0 * x^{a_1}$.

Задача 3.14. Используя данные таблицы 3.14, оцените параметры линейного уравнения множественной регрессии при помощи метода наименьших квадратов и рассчитайте теоретические уровни результативного показателя y(x).

Таблица 3.12

№	Y	X
1	4038,0	22,0
2	5791,0	25,4
3	6580,0	22,8
4	4078,0	29,1
5	9322,0	24,5
6	5748,0	23,4
7	13195,0	23,9
8	7786,0	32,7
9	3586,0	37,1
10	6510,0	26,0
11	10307,0	24,5
12	8718,0	27,4
13	7105,0	45,0
14	9526,0	24,2
15	4844,0	22,0

Таблица 3.13

№	Y	X
1	0,654	5411,0
2	0,660	4038,0
3	0,658	5647,0
4	0,663	4253,0
5	0,664	4078,0
6	0,670	5748,0
7	0,665	7786,0
8	0,674	5052,0
9	0,665	9472,0
10	0,664	3586,0
11	0,668	6510,0
12	0.672	7105,0
13	0,663	9526,0
14	0,666	4844,0
15	0,662	5362,0

Таблица 3.14

№	Y	X_1	X_2
1	5411,0	16,5	0,5
2	4038,0	22,0	3,2
3	8283,0	12,8	1,3
4	5647,0	14,8	2,1
5	4253,0	14,4	1,1
6	5791,0	25,4	2,0
7	6580,0	22,8	2,3
8	4078,0	29,1	0,5
9	9322,0	24,5	2,6
10	7419,0	16,1	0,7
11	5748,0	23,4	1,2
12	13195,0	23,9	2,7
13	7786,0	32,7	2,9
14	5052,0	15,6	1,3
15	9472,0	7,4	0,5

В заключение отобразите графически результаты решения задачи. Для этого в единой системе координат постройте по исходным данным (x_i;y_i) поле корреляции и, в соответствии с синтезированными моделями, линии регрессии. Координатами для их отображения являются фактические данные по факторной переменной *(x)* и соответствующие значения теоретических значений результативной *y (x)*.

Практическая работа по теме 2.2. Выполняется в приложении MS Excel.

Построение нелинейных регрессий (25 вариантов), выбор лучшей модели по коэффициенту корреляции и графическое изображение регрессии.

Задание. На основании данных табл. А1 приложения А для соответствующего варианта:

1. Построить предложенные нелинейные уравнения регрессии, включая линейную регрессию, на отдельных листах книги приложения MS Excel.
2. Вычислить индексы парной корреляции для каждого уравнения. Сделать выводы по качеству каждой модели.
3. Изобразить графически исходные данные и теоретические линии построенных регрессий.
4. Приложение А.

Таблица А.1

Варианты	Графы из табл. А2 (Х и У)	Линейная	Степенная	Экспоненциальная	Показательная	Логарифмическая	Гиперболическая	квадратичная
1	1 и 2	*	*	*		*		*
2	1 и 3	*		*	*		*	*
3	1 и 4	*	*		*	*		*
4	1 и 5	*	*	*			*	*
5	1 и 6	*		*	*	*		*
6	1 и 7	*	*		*		*	*
7	1 и 8	*	*	*		*		*
8	2 и 3	*		*	*		*	*
9	2 и 4	*	*		*	*		*
10	2 и 5	*	*	*			*	*
11	2 и 6	*		*	*	*		*
12	2 и 7	*	*		*		*	*
13	2 и 8	*	*	*		*		*
14	3 и 4	*		*	*		*	*
15	3 и 5	*	*		*	*		*
16	3 и 6	*	*	*			*	*
17	3 и 7	*		*	*	*		*
18	3 и 8	*	*		*		*	*
19	4 и 5	*	*	*		*		*
20	4 и 6	*		*	*		*	*
21	4 и 7	*	*		*	*		*
22	4 и 8	*	*	*			*	*
23	5 и 6	*		*	*	*		*
24	5 и 7	*	*		*		*	*
25	5 и 8	*		*	*	*		*

Таблица А2

вариант	№ граф Х, У	Графа 1	Графа 2	Графа 3	Графа 4	Графа 5	Графа 6	Графа 7	Графа 8
1	1 и 2	3	14	11	12	6	9	32	45
2	1 и 3	6	24	18	14	5	16	29	55
3	1 и 4	6	35	18	11	11	12	22	64
4	1 и 5	9	53	23	17	11	16	25	63
5	1 и 6	12	67	32	13	18	29	19	67
6	1 и 7	13	61	33	11	14	31	18	47
7	1 и 8	13	55	34	15	6	28	19	50
8	2 и 3	14	47	38	20	7	34	22	62
9	2 и 4	15	38	35	19	21	33	19	63
10	2 и 5	19	66	45	19	36	30	20	54
11	2 и 6	24	79	62	25	24	32	20	70
12	2 и 7	26	79	66	26	62	33	18	63
13	2 и 8	26	78	61	19	33	54	18	86
14	3 и 4	26	95	66	21	17	42	18	78
15	3 и 5	27	99	65	12	45	45	18	78
16	3 и 6	28	79	73	15	51	2	19	80
17	3 и 7	30	80	74	26	28	49	18	80
18	3 и 8	31	91	69	24	67	55	18	74
19	4 и 5	31	88	70	16	39	52	17	95
20	4 и 6	33	77	86	17	53	42	19	80
21	4 и 7	34	74	79	21	48	40	19	79
22	4 и 8	35	107	82	18	57	64	19	80
23	5 и 6	66	172	162	16	327	112	17	117
24	5 и 7	36	80	79	19	66	43	18	100
25	5 и 8	36	110	91	20	51	43	17	81