# *МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ*

***к выполнению лабораторных работ***

***по дисциплине «Вычислительная математика»***

## ОГЛАВЛЕНИЕ

# 1 Решение нелинейного уравнения

## *1.1 Общие сведения о решении нелинейного уравнения*

Как правило, нелинейное уравнения общего вида $f(x)=0$ невозможно решить аналитически. Для практических задач достаточно найти приближенное значение $x$, в определенном смысле близкое к точному решению уравнения $x_{точн}$.

В большинстве случаев поиск приближенного решения включает два этапа. На первом этапе *отделяют* корни, т. е. находят такие отрезки, внутри которых находится строго один корень. На втором этапе *уточняют* корень на одном из таких отрезков, т.е. находят его значение с требуемой точностью.

Достигнутая точность может оцениваться либо «по функции» (в найденной точке $x$, функция достаточно близка к 0, т.е. выполняется условие $|f(x)|\le \varepsilon_f$, где $\varepsilon_f$ требуемая точность по оси ординат), либо «по аргументу» (найден достаточно маленький отрезок $[a,b]$, внутри которого находится корень, т.е. $|b–a|\le \varepsilon_x$, где $\varepsilon_x$ требуемая точность по оси абсцисс).

## *1.2 Отделение корней*

Отделение корней может производиться сочетанием графического и аналитического исследования функции. Такое исследование опирается на теорему Вейерштрасса, в соответствии с которой для непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ и любого числа $y$, отвечающего условию $f(a)\le y\le f(b)$, существует на этом отрезке точка $x$, в которой функция равна $y$. Следовательно, для непрерывной функции достаточно найти отрезок, на концах которого функция имеет разные знаки, и можно быть уверенным, что на этом отрезке есть корень уравнения $f(x)=0$.

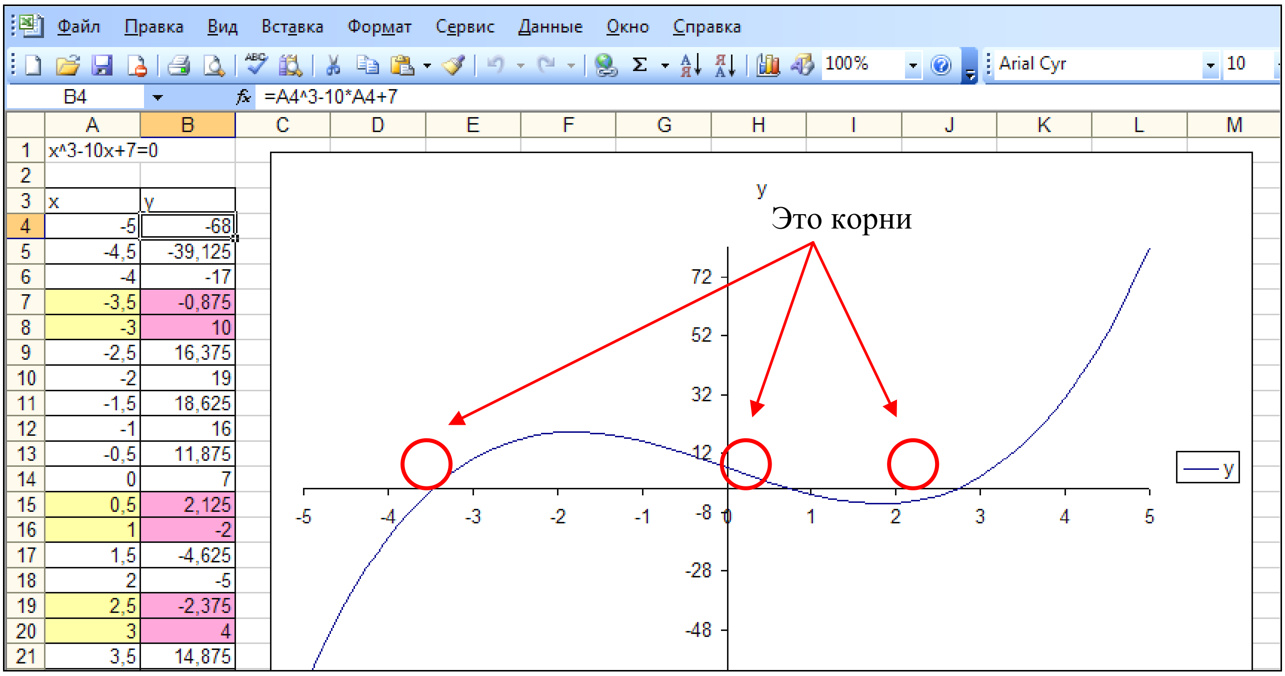
Для ряда методов уточнения желательно, чтобы найденный на первом этапе отрезок содержал только один корень уравнения. Это условие выполняется, если функция на отрезке монотонна. Монотонность, можно проверить либо по графику функции, либо по знаку производной.

Пример Найти с точностью до целых все корни нелинейного уравнения $y(x)=x^3 - 10x + 7=0$ а) построив таблицу и б) построив график. Найти корень уравнения на выделенном отрезке, используя опции «Подбор параметра» и «Поиск решения».

Решение Создадим в Excel таблицу, содержащую аргументы и значения функции и по ней построим *точечную диаграмму*. На рисунке 1 приведен снимок решения.

На графике видно, что уравнение имеет три корня, принадлежащие отрезкам [-4, -3], [0, 1] и [2, 3]. Эти отрезки можно выявить и наблюдая за сменой знаков функции в таблице. По построенному графику можно сделать вывод, что на указанных отрезках функция $f(x)$ монотонна и, следовательно, на каждом из них содержится только по одному корню.

Такой же анализ может быть выполнен и в пакете Mathcad. Для этого достаточно набрать определение функции $f(x)$, используя оператор присваивания (:=) и естественные общепринятые обозначения математических операций и стандартных функций, задать цикл для изменения аргумента, например, а затем вывести на экран таблицу значений функции (расположенными в одной строке командами $x=$ $f(x)=$) и график. Цикл можно задать, например, командой $x:=-5,-4.5…5$. Шаг цикла формируется путем задания начального и следующего за ним значений переменной, а перед конечным значением переменной ставится точка с запятой, которая будет визуально отображена на экране в виде многоточия.



| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | x^3-10x+7=0 | |
| 2 | | |
| 3 | x | y |
| 4 | -5 | -68 |
| 5 | -4,5 | -39,125 |
| 6 | -4 | -17 |
| 7 | -3,5 | -0,875 |
| 8 | -3 | 10 |
| 9 | -2,5 | 16,375 |
| 10 | -2 | 19 |
| 11 | -1,5 | 18,625 |
| 12 | -1 | 16 |
| 13 | -0,5 | 11,875 |
| 14 | 0 | 7 |
| 15 | 0,5 | 2,125 |
| 16 | 1 | -2 |
| 17 | 1,5 | -4,625 |
| 18 | 2 | -5 |
| 19 | 2,5 | -2,375 |
| 20 | 3 | 4 |
| 21 | 3,5 | 14,875 |

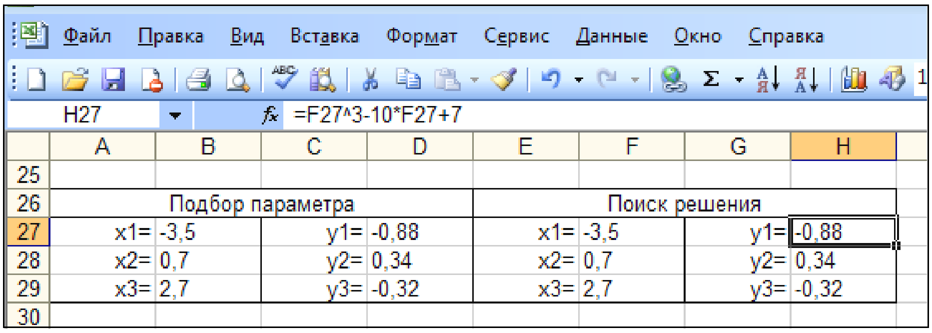


*Рисунок 1 – Таблица и график для отделения корней нелинейного уравнения*

## *1.3 Уточнение корней стандартными средствами Excel и Mathcad*

Во всех методах уточнения корней необходимо задать начальное приближение, которое затем и будет уточняться. Если уравнение имеет несколько корней, в зависимости от выбранного начального приближения будет найден один из них. При неудачно выбранном начальном приближении решение может и не быть найдено. Если в результате первого этапа расчетов уже выделен отрезок, содержащий единственный корень уравнения, в качестве начального приближения можно взять любую точку этого отрезка.

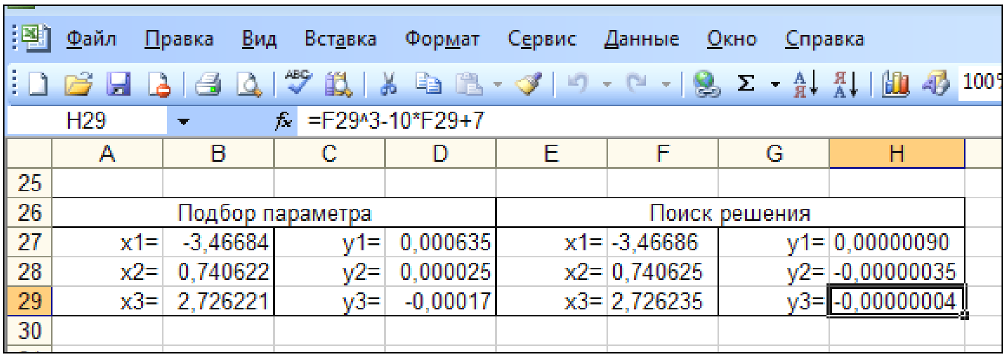
В Excel для уточнения значений корней можно использовать опции «Подбор параметра» и «Поиск решения». Пример оформления решения приведен на рисунках 2 и 3.



| | Подбор параметра | | | | Поиск решения | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 27 | x1= | -3,5 | y1= | -0,88 | x1= | -3,5 | y1= | -0,88 |
| 28 | x2= | 0,7 | y2= | 0,34 | x2= | 0,7 | y2= | 0,34 |
| 29 | x3= | 2,7 | y3= | -0,32 | x3= | 2,7 | y3= | -0,32 |



*Рисунок 2 – Ввод значений для использования средств решения уравнения в Excel*



| | Подбор параметра | | | | Поиск решения | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 27 | x1= | -3,46684 | y1= | 0,000635 | x1= | -3,46686 | y1= | 0,00000090 |
| 28 | x2= | 0,740622 | y2= | 0,000025 | x2= | 0,740625 | y2= | -0,00000035 |
| 29 | x3= | 2,726221 | y3= | -0,00017 | x3= | 2,726235 | y3= | -0,00000004 |



*Рисунок 3 – Результаты использования средств решения уравнения в Excel*

В Mathcad для уточнения корней уравнения можно использовать функцию *root(….)* или блок решения. Пример использования функции root(…) приведен на рисунке 4, а блока решения на рисунке 5. Следует обратить внимание, что в блоке решения (после заголовка блока *Given*) между левой и правой частями уравнения должен стоять жирный знак равенства (тождества), который можно получить выбором из соответствующей палитры инструментов, либо нажатием одновременно клавиши *Ctrl* и =.

$$f(x) := x^3 - 10 \cdot x + 7$$

$$x := -3.5 \qquad r := \mathrm{root}(f(x), x)$$

$$f(r) = -0.00000000000009$$

$$r = -3.46685999$$

*Рисунок 4 – Решение уравнения с использованием функции root(…) в Mathcad*

$$f(x) := x^3 - 10 \cdot x + 7$$

$$x := -3.5$$

$$\text{Given} \qquad f(x) = 0 \qquad r := \mathrm{find}(x)$$

$$r = -3.46685999 \qquad f(r) = -0.00000000000001$$

*Рисунок 5 – Решение уравнения с использованием блока решения в Mathcad*

Как видим, каждый стандартный инструмент находит решение уравнения с определенной точностью. Эта точность зависит от метода, используемого в пакете и, в определенной степени, настроек пакета. Управлять точностью результата здесь достаточно сложно, а часто и невозможно.

В то же время, очень просто построить собственную таблицу или написать программу, реализующие один из методов уточнения корней. Здесь можно использовать критерии точности расчета, задаваемые пользователем. При этом достигается и понимание процесса расчетов без опоры на принцип Митрофанушки: «Извозчик есть, довезет».

Далее рассмотрены несколько наиболее распространенных методов. Отметим очевидный момент: при прочих равных условиях тот метод уточнения корней будет более эффективен, в котором результат с той же погрешностью найден с меньшим числом вычислений функции *f(x)* (при этом достигается и максимальная точность при одинаковом числе вычислений функции).

### *1.4 Метод деления отрезка пополам*

В этом методе на каждом шаге отрезок делится на две равные части. Затем сравнивают знаки функции на концах каждой из двух половинок (например, по знаку произведения значений функций на концах), определяют ту из них, в которой содержится решение (знаки функции на концах должны быть разные), и. сужают отрезок, перенося в найденную точку его границу (*a* или *b*). Условием окончания служит малость отрезка, где содержится корень («точность по *x*»), либо близость к 0 значения функции в средине отрезка («точность по y»). Решением уравнения считают середину отрезка, найденного на последнем шаге.

Пример. Построить таблицу для уточнения корня уравнения $x^3 - 10x + 7 = 0$ на отрезке $[-4, -3]$ методом деления отрезка пополам. Определить сколько шагов надо сделать методом деления отрезка пополам и какая при этом достигается точность по $x$, для достижения точности по $y$, равной 0,1; 0,01; 0, 001.

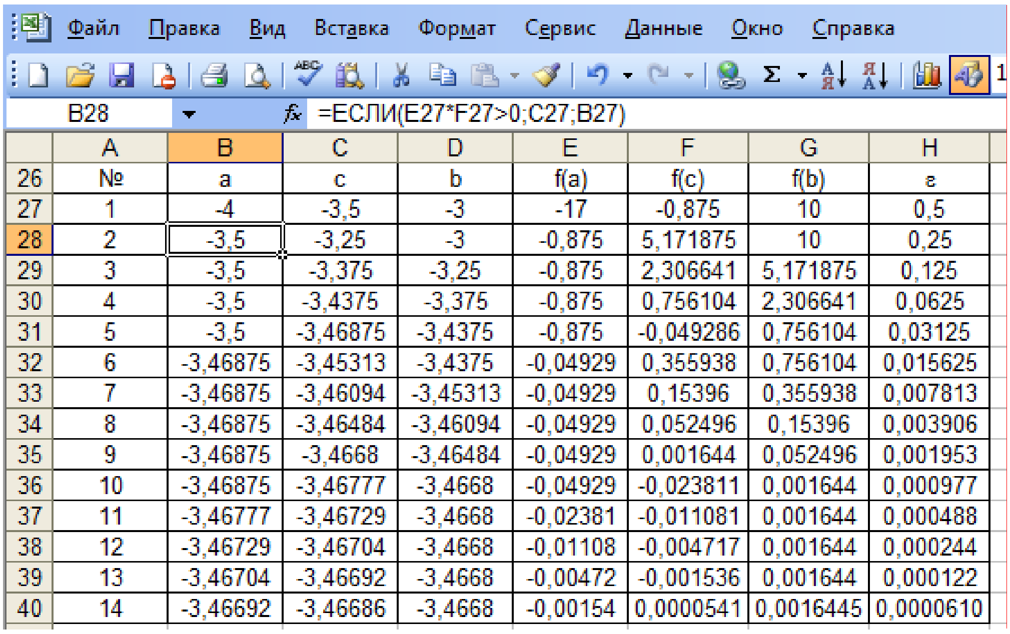
Решение Для решения можно использовать табличный процессор Excel, позволяющий автоматически продолжать строки. На первом шаге заносим в таблицу значения левого и правого концов выбранного начального отрезка и вычисляем значение середины отрезка $c=(a+b)/2$, а затем вводим формулу для вычисления функции в точке $a$ ($f(a)$) и растягиваем (копируем) её для вычисления $f(c)$ и $f(b)$. В последнем столбца вычисляем выражение $(b-a)/2$, характеризующего степень точности вычислений. Все набранные формулы можно скопировать во вторую строку таблицы.

На втором шаге нужно автоматизировать процесс поиска той половины отрезка, где содержится корень. Для этого испльзуется логическая функция ЕСЛИ (*Меню*: Вставка→Функция→Логические). Для нового левого края отрезка мы проверяем истинность условия $f(a)*f(c)>0$, если оно верно, то мы в качестве нового значения левого конца отрезка берем число $c$ (т.к. это условие показывает, что корня на отрезке $[a, c]$ нет), иначе оставляем значение $a$. Аналогично, для нового правого края отрезка мы проверяем истинность условия $f(c)*f(b)>0$, если оно верно, то мы в качестве нового значения правого конца отрезка берем число $c$ (т.к. это условие показывает, что корня на отрезке $[c, b]$ нет), иначе оставляем значение $b$.

Вторую строку таблицы можно продолжить (скопировать) на необходимое число последующих строк.

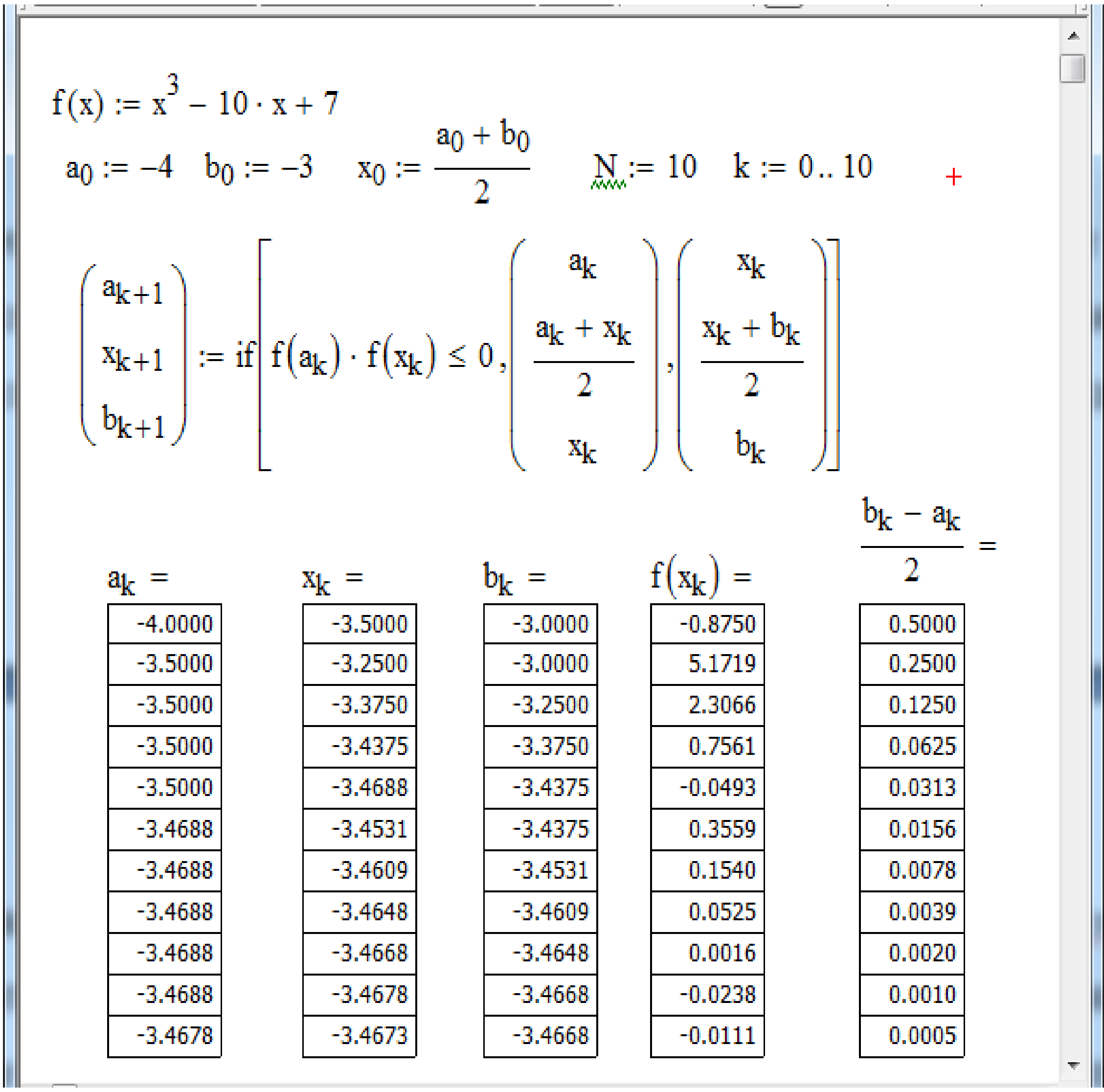
Итерационный процесс завершается, когда очередное значение в последнем столбце становится меньшим, чем заданный показатель точности $\varepsilon_x$. При этом, значение середины отрезка в последнем приближении, принимается в качестве приближенного значения искомого корня нелинейного уравнения. На рисунке 6 приведен снимок решения. Для построения аналогичного процесса в Mathcad можно использовать бланк, подобный приведенному на рисунке 7. Число шагов N может варьироваться до достижения в таблице результатов требуемой точности. При этом таблица будет автоматически удлиняться или укорачиваться.

Итак, одним из трех корней нелинейного уравнения $x^3 - 10x + 7=0$, найденным с точностью $\varepsilon=0{,}0001$, является $x= - 3{,}46686$. Как мы видим, он действительно принадлежит отрезку [-4; -3].




| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | № | a | c | b | f(a) | f(c) | f(b) | ε |
| 27 | 1 | -4 | -3,5 | -3 | -17 | -0,875 | 10 | 0,5 |
| 28 | 2 | -3,5 | -3,25 | -3 | -0,875 | 5,171875 | 10 | 0,25 |
| 29 | 3 | -3,5 | -3,375 | -3,25 | -0,875 | 2,306641 | 5,171875 | 0,125 |
| 30 | 4 | -3,5 | -3,4375 | -3,375 | -0,875 | 0,756104 | 2,306641 | 0,0625 |
| 31 | 5 | -3,5 | -3,46875 | -3,4375 | -0,875 | -0,049286 | 0,756104 | 0,03125 |
| 32 | 6 | -3,46875 | -3,45313 | -3,4375 | -0,04929 | 0,355938 | 0,756104 | 0,015625 |
| 33 | 7 | -3,46875 | -3,46094 | -3,45313 | -0,04929 | 0,15396 | 0,355938 | 0,007813 |
| 34 | 8 | -3,46875 | -3,46484 | -3,46094 | -0,04929 | 0,052496 | 0,15396 | 0,003906 |
| 35 | 9 | -3,46875 | -3,4668 | -3,46484 | -0,04929 | 0,001644 | 0,052496 | 0,001953 |
| 36 | 10 | -3,46875 | -3,46777 | -3,4668 | -0,04929 | -0,023811 | 0,001644 | 0,000977 |
| 37 | 11 | -3,46777 | -3,46729 | -3,4668 | -0,02381 | -0,011081 | 0,001644 | 0,000488 |
| 38 | 12 | -3,46729 | -3,46704 | -3,4668 | -0,01108 | -0,004717 | 0,001644 | 0,000244 |
| 39 | 13 | -3,46704 | -3,46692 | -3,4668 | -0,00472 | -0,001536 | 0,001644 | 0,000122 |
| 40 | 14 | -3,46692 | -3,46686 | -3,4668 | -0,00154 | 0,0000541 | 0,0016445 | 0,0000610 |

*Рисунок 6 – Уточнение корня методом деления отрезка пополам в Excel*



$$f(x) := x^3 - 10 \cdot x + 7$$

$$a_0 := -4 \quad b_0 := -3 \quad x_0 := \frac{a_0 + b_0}{2} \qquad N := 10 \quad k := 0..10$$

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ x_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} := \mathrm{if}\left[ f(a_k) \cdot f(x_k) \le 0, \begin{pmatrix} a_k \\ \frac{a_k + x_k}{2} \\ x_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_k \\ \frac{x_k + b_k}{2} \\ b_k \end{pmatrix} \right]$$

| $a_k =$ | $x_k =$ | $b_k =$ | $f(x_k) =$ | $\frac{b_k - a_k}{2} =$ |
|---|---|---|---|---|
| -4.0000 | -3.5000 | -3.0000 | -0.8750 | 0.5000 |
| -3.5000 | -3.2500 | -3.0000 | 5.1719 | 0.2500 |
| -3.5000 | -3.3750 | -3.2500 | 2.3066 | 0.1250 |
| -3.5000 | -3.4375 | -3.3750 | 0.7561 | 0.0625 |
| -3.5000 | -3.4688 | -3.4375 | -0.0493 | 0.0313 |
| -3.4688 | -3.4531 | -3.4375 | 0.3559 | 0.0156 |
| -3.4688 | -3.4609 | -3.4531 | 0.1540 | 0.0078 |
| -3.4688 | -3.4648 | -3.4609 | 0.0525 | 0.0039 |
| -3.4688 | -3.4668 | -3.4648 | 0.0016 | 0.0020 |
| -3.4688 | -3.4678 | -3.4668 | -0.0238 | 0.0010 |
| -3.4678 | -3.4673 | -3.4668 | -0.0111 | 0.0005 |

*Рисунок 7 – Уточнение корня методом деления отрезка пополам в Mathcad*

### *1.5 Метод хорд*

В этом методе нелинейная функция *f(x)* на отделенном интервале [*a,b*] заменяется линейной – уравнением хорды, т.е. прямой соединяющей граничные точки графика на отрезке. Условие применимости метода – монотонность функции на начальном отрезке, обеспечивающая единственность корня на этом отрезке. Расчет по методу хорд аналогичен расчету методом деления отрезка пополам, но теперь на каждом шаге новая точка *x* внутри отрезка [*a,b*] рассчитывается по любой из следующих формул:

$$x = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a) = b - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(b) = \frac{f(b)a - f(a)b}{f(b)-f(a)}.$$

### *1.6 Метод Ньютона (касательных)*

Идея, на которой основан метод, аналогична той, которая реализована в методе хорд, только на каждом шаге кривая $f(x)$ заменяется касательной к ней, проведенной в предыдущей найденной точке. В качестве начальной точки в зависимости от свойств функции берется или левая граница отрезка, содержащего корень – $x_0 = a$ (если $f(a)\,f''(x) > 0$), или правая его граница: $x_0 = b$ (если $f(b)\,f''(x)>0$). Расчет нового приближения на следующем шаге $i+1$ производится по формуле:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Алгоритм применим для монотонных функций, сохраняющих выпуклость или вогнутость в промежутке между начальным приближением и корнем уравнения (т.е. должен сохраняться знак первой и второй производных функции *f(x)*). работоспособен при выпуклых и монотонных функциях *f(x)*. В расчетах нет необходимости отслеживать две границы отрезка, поэтому достаточно на каждом шаге вычислять значения *x*, *f(x)* и *f'(x)*. При этом легко оценить «точность по *y*», по значению левой части уравнения на очередном шаге. Для оценки «точности по x» нужно отслеживать разницу приближений на предыдущем и последующих шагах, которая связана с разницей между найденным приближением и точным значением корня.

Следует обратить внимание на следующую особенность метода: последовательность $x_1$, $x_2$, $x_3$,… приближается к корню с другой стороны, в отличие от использования метода хорд при прочих равных условиях.

Главным достоинством метода касательных является квадратичная скорость сходимости, что во многих случаях может привести к сокращению числа вычислений функции.

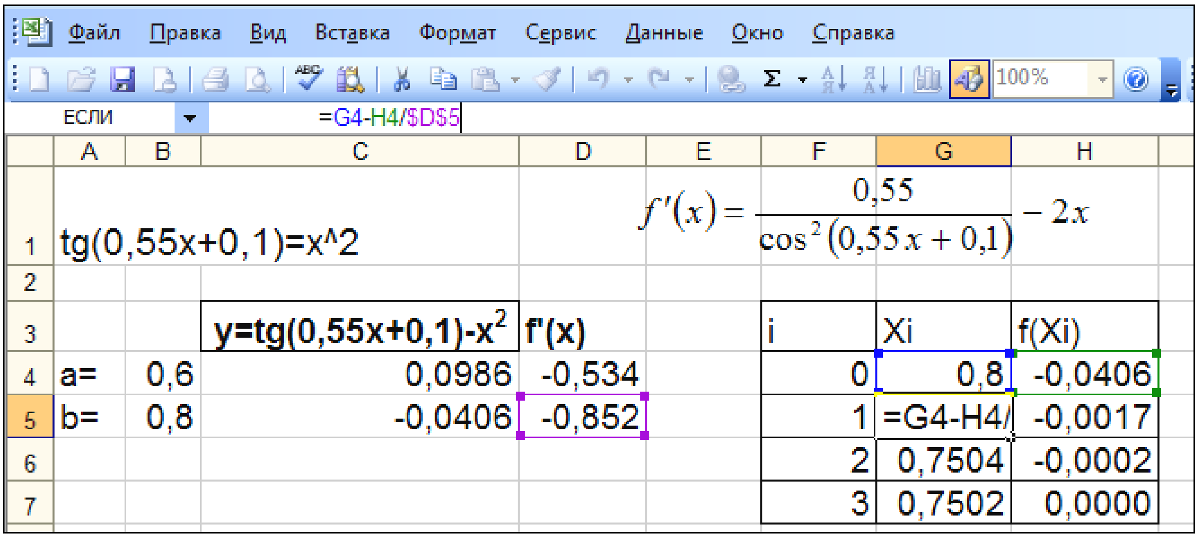
Пример

Уточнить корень уравнения $tg\ (0{,}55x+0{,}1) - x^2=0$ на отрезке [0.6, 0.8] методом касательных до точности 0,001.

Решение

Так как $f\,(0{,}6) > 0$, $f\,(0{,}8) < 0$, $f''(x) < 0$, то за начальное приближение примем $x_0 = 0{,}8$. Вычисления будем производить по формуле:

Для вычислений в Excel составляется таблица, показанная на рисунке 8. Получим ответ $x = 0{,}7502$. Заданная точность обеспечивается выполнением условия $|f(x_i)| \le 0.001$.





| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | tg(0,55x+0,1)=x^2 | | | | $f'(x)=$ | $\frac{0{,}55}{\cos^2(0{,}55x+0{,}1)}$ | | $-2x$ |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | | y=tg(0,55x+0,1)-x$^2$ | f'(x) | | i | Xi | f(Xi) |
| 4 | a= | 0,6 | 0,0986 | -0,534 | | 0 | 0,8 | -0,0406 |
| 5 | b= | 0,8 | -0,0406 | -0,852 | | 1 | =G4-H4/ | -0,0017 |
| 6 | | | | | | 2 | 0,7504 | -0,0002 |
| 7 | | | | | | 3 | 0,7502 | 0,0000 |

*Рисунок 8 – Уточнение корня методом касательных в Excel*

Расчеты в Mathcad выполняются аналогично. При этом значительное облегчение доставляет наличие в этом пакете оператора, автоматически вычисляющего производную функции.

Наиболее трудоемким элементом расчетов по методу Ньютона является вычисление производной на каждом шаге.

При определенных условиях может использоваться **упрощенный метод Ньютона**, в котором производная вычисляется только один раз – в начальной точке. При этом используется видоизмененная формула

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_0)}.$$

Естественно, что упрощенный метод, как правило, требует большего числа шагов.

Если вычисление производной связано с серьезными трудностями (например, если функция задана не аналитическим выражением, а вычисляющей ее значения программой) используется модифицированный метод Ньютона, получивший название – **метод секущих**. Здесь производная приближенно вычисляется по значениям функции в двух последовательных точках, то есть используется формула

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}.$$

В методе секущих необходимо задаться не одной, а двумя начальными точками – $x_0$ и $x_1$. Точка $x_1$ обычно задается сдвигом $x_0$ к другой границе отрезка на малую величину, например, на 0.01.

### 1.7 Комбинированный метод

Можно показать, что если на начальном отрезке у функции *f(x)* сохраняются неизменными знаки первой и второй производных, то методы хорд и Ньютона приближаются к корню с разных. В комбинированном методе для повышения эффективности на каждом шаге использует оба алгоритма одновременно. При этом интервал, где содержится корень, сокращается с обеих сторон, что обусловливает другое условие окончания поиска. Поиск можно прекратить, как только в середине интервала, полученного на очередном шаге значение функции станет по модулю меньшим, чем предварительно заданной погрешности $\varepsilon_f$.

Если, в соответствии со сформулированным выше правилом, метод Ньютона применяется к правой границе отрезка, для вычислений используются формулы:

$$a_{i+1} = a_n - \frac{f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}(b_i - a_i);$$

$$b_{i+1} = b_i - \frac{f(b_i)}{f'(b_i)}.$$

Если метод Ньютона применяется к левой границе, – в предыдущих формулах меняются местами обозначения $a$ и $b$.

### *1.8 Метод итераций*

Для применения этого метода исходное уравнение $f(x)=0$ преобразуют к виду: $x=\psi(x)$. Затем выбирают начальное значение $x_0$ и подставляют его в левую часть уравнения, получая, в общем случае, $x_1=\psi(x_0) \neq x_0 \neq \psi(x_1)$, поскольку $x_0$ взято произвольно и не является корнем уравнения. Полученное значение $x_1$ рассматривают как очередное приближение к корню. Его снова подставляют в правую часть уравнения и получают следующее значение $x_2=\psi(x_1)$). Расчет продолжают по формуле $x_{i+1}=\psi(x_i)$. Получающаяся таким образом последовательность: $x_0, x_1, x_2, x_3\ x_4$,... при определенных условиях сходиться к корню $x_{точн}$.

Можно показать, что итерационный процесс сходится при условии $|\psi'(x)| < 1$ на $[a, b]$.

Существуют различные способы преобразования уравнения $f(x) = 0$ к виду $\psi(x) = x$, причем в конкретном случае одни из них приведут к сходящемуся, а другие – к расходящемуся процессу вычислений.

Один из способов, заключается в применении формулы

$$\psi(x) = x - \frac{f(x)}{k},$$

причем $k$ следует выбирать так, чтобы $| k | > Q/2$, где $Q = max|f'(x)|$ на отрезке $[a, b]$ и знак $k$ совпадал бы со знаком $f'(x)$ на $[a, b]$.

Точность вычислений можно оценить из соотношения

$$|x_{точн} - x_n| \leq \frac{M^n}{1-M} \cdot |x_1 - x_0|,$$

где $M = \max|\psi'(x)|$ на $[a, b]$.

# 2 Решение систем нелинейных уравнений

## *2.1 Общие сведения о решении систем нелинейных уравнений*

Систему *n* нелинейных уравнений с *n* неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$ записывают в виде:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \quad\quad ... \\ F_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

где $F_1, F_2, \ldots, F_n$ – функции независимых переменных, среди которых есть нелинейные.

Как и в случае систем линейных уравнений, решением системы является такой вектор $X^*$, который при подстановке обращает одновременно все уравнения системы в тождества.

$$(X^*) = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ ... \\ x_n^* \end{pmatrix}$$

Система уравнений может не иметь решений, иметь единственное решение, конечное или бесконечное количество решений. Вопрос о количестве решений должен решаться для каждой конкретной задачи отдельно.

Численные методы решения системы уравнений носят итерационный характер и требуют задания начального приближения $X^0$.

Рассмотрим две группы таких методов: метод Ньютона с различными его модификациями и методы итераций (простых итераций и Зейделя).

## *2.2 Решение систем нелинейных уравнений методом Ньютона*

Будем рассматривать этот метод на примере системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными:

$$F(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{f(x, y) = 0,} \\ \mathrm{u(x, y) = 0.} \end{cases}$$

Начальные значения $x^0$ и $y^0$ определяются графически. Для нахождения каждого последующего приближения $(x^{i+1}, y^{i+1})$ используют вектор значений функций и матрицу значений их первых производных, рассчитанные в предыдущей точке $(x^i, y^i)$.

$$F(x^i, y^i) = \begin{pmatrix} f(x^i, y^i) \\ u(x^i, y^i) \end{pmatrix},$$

$$F'(x^i, y^i) = \begin{pmatrix} f'_x(x^i, y^i) & f'_y(x^i, y^i) \\ u'_x(x^i, y^i) & u'_y(x^i, y^i) \end{pmatrix}$$

Для расчета новых приближений на шаге $i+1$ используется матричная формула

$$\begin{pmatrix} x^{i+1} \\ y^{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^i \\ y^i \end{pmatrix} - \left(F'(x^i, y^i)\right)^{-1} * F(x^i, y^i).$$

Следует обратить внимание, что в последней формуле используется вычисление матрицы, обратной к матрице первых производных.

Расчет останавливают при выполнении одного (а иногда и обоих) из двух условий. Первое из них заключается в том, что на очередном шаге максимальное по модулю из изменений аргументов *x* и *y* становится меньше заданная погрешность по аргументам. В соответствии со вторым из условий, на очередном шаге максимальное по модулю значение левых частей уравнений должно отличаться от нуля меньше, чем заданная погрешность по функциям.

В **упрощенном методе Ньютона** матрица производных и матрица, обратная к ней вычисляются только один раз (в начальной точке) и для расчетов используется матричная формула

$$\begin{pmatrix} x^{i+1} \\ y^{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{i} \\ y^{i} \end{pmatrix} - \left(F'(x^0, y^{i0})\right)^{-1} * F(x^i, y^i).$$

Приведенные формулы особенно легко записать в Mathcad, где имеются операторы для вычисления производных и действий с матрицами. Однако при правильном использовании матричных операций эти формулы достаточно просто записываются и в Excel. Правда, здесь придется заранее получить формулы для вычисления производных. Для аналитического вычисления производных также может быть использован Mathcad.

### *2.3 Решение систем нелинейных уравнений методами итераций*

Для реализации этих методов исходную систему уравнений необходимо путем алгебраических преобразований явно выразить каждую переменную через остальные. Для случая двух уравнений с двумя неизвестными новая система будет иметь вид

$$\begin{cases} x = \varphi(x, y) \\ y = \psi(x, y) \end{cases}.$$

Для решения такой системы задаются начальным приближением $x^0$, $y^0$. Уточненные решения получают по шагам, подставляя в правые части уравнений значения, найденные на предыдущем шаге. В **методе простых итераций** для уточнения решения используют формулы:

$$\begin{cases} x^{i+1} = \varphi(x^i, y^i) \\ y^{n+1} = \psi(x^i, y^i) \end{cases}.$$

Если одно из решений системы и начальные значения $x_0$ и $y_0$ лежат в области *D*, задаваемой неравенствами: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, то расчет по методу простых итераций сходится при выполнении в области *D* соотношений:

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right| < 1, \ \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right| < 1.$$

В **методе итераций Зейделя** для каждого расчета используют уже найденные наиболее точные значения каждой переменной. Для рассматриваемого случая двух переменных такая логика приводит к формулам

$$\begin{cases} x^{i+1} = \varphi(x^i, y^i) \\ y^{n+1} = \psi(x^{i+1}, y^i) \end{cases}.$$

# 3 Задания к лабораторным работам

## *Лабораторная № 1. Отделение корней и стандартные инструменты решения нелинейного уравнения*

*Задание к работе*

1. Отделить с точностью до целых все корни заданных уравнений:

   а) построив таблицу;

   б) построив график.

2. Найти корень уравнения на одном из выделенных отрезков (по согласованию с преподавателем), используя стандартные опции доступных пакетов программ. Для каждой опции выполнить три расчета, принимая за начальное приближение обе границы и середину отрезка. Результаты расчетов занести в таблицу вида

| **Инструмент (опция)** | **Начальное приближение** | **Корень *x*** | ***f(x)*** |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |

3.Отсортировать полученные результаты по точности решения.

4. Построить таблицу для уточнения корня уравнения методом деления отрезка пополам.

4. Определить сколько шагов надо сделать методом деления отрезка пополам и какая при этом достигается точность по $x$ для достижения точности по $y$, равной 0,1; 0,01; 0, 001 и максимальной точности, полученной в пункте 2. Результаты анализа занести в таблицу вида

| **Точность по *y*** | **Корень *x*** | ***f(x)*** | ***Число шагов*** | **Достигнутая точность по *x*** |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

*Варианты индивидуальных заданий.*

| № варианта | Уравнение 1 | Уравнение 2 |
|---|---|---|
| 1. | $x^3 - 3x^2 + 9x - 8=0$ | $x - \sin x=0,25$ |
| 2. | $x^3 -6x - 8=0$ | $tg(0,58x + 0,1)=x^2$ |
| 3. | $x^3 - 3x^2 + 6x +3=0$ | $\sqrt{x} - \cos(0,387x)=0$ |
| 4. | $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x - 1,5=0$ | $tg(0,4x + 0,4)=x^2$ |
| 5. | $x^3 - 3x^2 + 9x +2=0$ | $\lg x - 7/(2x+6)=0$ |
| 6. | $x^3 + x - 5=0$ | $tg(0,5x + 0,2)=x^2$ |
| 7. | $x^3 +0,2x^2 + 0,5x - 1,2=0$ | $3x-\cos x - 1=0$ |
| 8. | $x^3 + 3x + 1=0$ | $x + \lg x= 0,5$ |
| 9. | $x^3 +0,2x^2 + 0,5x - 2=0$ | $tg(0,5x + 0,1)=x^2$ |
| 10. | $x^3 - 3x^2 + 12x - 9 =0$ | $x^2+4\sin x = 0$ |
| 11. | $x^3 - 0,2x^2 + 0,3x - 1,2=0$ | $ctg\ 1,05x - x^2=0$ |
| 12. | $x^3 - 3x^2 + 6x - 2=0$ | $tg(0,4x + 0,3)=x^2$ |
| 13. | $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x - 1,5=0$ | $x\lg x - 1,2=0$ |
| 14. | $x^3 + 3x^2 + 6x - 1=0$ | $1,8x^2 - \sin 10x - 0,1=0$ |
| 15. | $x^3 +0,1x^2 + 0,4x - 1,2=0$ | $ctg\ x - x/4=0$ |
| 16. | $x^3 +4x - 6=0$ | $tg(0,3x + 0,4)=x^2$ |

| | | |
|---|---|---|
| 17. | $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x + 0,8=0$ | $x^2 – 20\sin x + 1=0$ |
| 18. | $x^3 – 3x^2 + 12x – 12=0$ | $\operatorname{ctg} x – x/3=0$ |
| 19. | $x^3 – 0,2x^2 + 0,3x + 1,2=0$ | $\operatorname{tg}(0,47x + 0,2)=x^2$ |
| 20. | $x^3 –2x +5=0$ | $x^2 +4\sin x =0$ |
| 21. | $x^3 – 0,2x^2 + 0,5x – 1,4=0$ | $\operatorname{ctg} x – x/2=0$ |
| 22. | $x^3 – 3x^2 + 6x – 5=0$ | $2x – \lg x – 7 =0$ |
| 23. | $x^3 – 0,1x^2 + 0,4x + 1,2=0$ | $\operatorname{tg}(0,44x + 0,3)=x^2$ |
| 24. | $x^3 – 0,2x^2 + 0,5x – 1=0$ | $3x – \cos x – 1=0$ |
| 25. | $x^3 + 3x^2 + 12x + 8=0$ | $\operatorname{ctg} x – x/10=0$ |
| 26. | $x^3 – 0,1x^2 +0,4x +2=0$ | $x^2 +4\sin x + 0,1=0$ |
| 27. | $x^3 – 0,2x^2 + 0,4x – 1,4=0$ | $\operatorname{tg}(0,36x + 0,4)=x^2$ |
| 28. | $x^3 + 0,4x^2 + 0,6x – 1,6=0$ | $x + \lg x =0,5$ |
| 29. | $x^3 + x – 3=0$ | $\operatorname{ctg} x – x/5=0$ |
| 30. | $x^3 – 0,2x^2 + 0,5x +1,4=0$ | $2\operatorname{tg} x – x/2 +1=0$ |

## *Лабораторная № 2. Сравнение методов уточнения корней нелинейного уравнения*

*Задание к работе*

1)Отделить с точностью до целых один любой корень уравнения f(x)=0.

2)Построив соответствующие таблицы, определить сколько шагов нужно сделать до достижения точности 0.001 по *x* каждым из следующих методов:

а) деления отрезка пополам; б) хорд; в) Ньютона (касательных);

г) упрощенным Ньютона; д) секущих; е) комбинированным; ж) итераций.

3)Выполнить аналогичные расчеты до достижения точности 0.001 по *y*.

4)Записать количество шагов, потребовавшееся в каждом из расчетов, в таблицу вида

| **Метод** | **Число шагов для точности 0,001 по *x*** | **Число шагов для точности 0,001 по *y*** |
|---|---|---|
| | | |

*Варианты индивидуальных заданий.*

| **№** | **f(X)** | **№** | **f(X)** |
|---|---|---|---|
| **1** | $X^3+3X–1$ | **19** | $x^4+x^2–2x–2$ |
| **2** | $X^3–3X–1$ | **20** | $x^3+3x–0,5$ |
| **3** | $X^3+2X–11$ | **21** | $x^4+3x–20$ |
| **4** | $X^3–2X–11$ | **22** | $x^4–3x+1$ |
| **5** | $x^3+x+1$ | **23** | $x^3+3x+5$ |
| **6** | $x^3–2x+2$ | **24** | $x^4+5x–7$ |
| **7** | $x^3–x+2$ | **25** | $x^3–12x–5$ |
| **8** | $x^3–2x–5$ | **26** | $x^3–10x+5$ |
| **9** | $x^3+x–3$ | **27** | $x^3–5x^2+7x+10$ |
| **10** | $x^3–x+1$ | **28** | $x^3+4x–9$ |
| **11** | $x^3+x–1$ | **29** | $x^3+5x^2–7x–10$ |
| **12** | $x^3+3x+1$ | **30** | $x^3–4x+9$ |
| **13** | $x^4+0,5x–1,55$ | **31** | $x^3+10x–5$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **14** | $x^3–4x–1$ | **32** | $x^3+6x^2–8x+4$ |
| **15** | $x^3–5x+0,1$ | **33** | $x^3–8x^2+6x–4$ |
| **16** | $x^3–x–2$ | **34** | $x^3+9x^2–3x+2$ |
| **17** | $x^3–3x+1$ | **35** | $x^3–2x^2–4x–7$ |
| **18** | $x^3–2x^2+3x–5$ | **36** | $x^3–2x^2+3x–10$ |

## *Лабораторная № 3. Решение систем нелинейных уравнений*

*Задание к работе*

1) Определить начальные приближения для решения системы уравнений.

2) Построив соответствующие таблицы, определить сколько шагов нужно сделать методом Ньютона до достижения точности а) 0.1, б) 0.01 в) 0.001 по аргументам и по функциям каждым из следующих методов: Ньютона, упрощенным Ньютона; простых итераций; Зейделя.

3) Записать результаты в таблицу вида

| Точность | Число шагов для достижения точности методом | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Ньютона | Ньютона, упрощенному | Простых итераций | Зейделя |
| 0.100 по *x* | | | | |
| 0.010 по *x* | | | | |
| 0.001 по *x* | | | | |
| 0,100 по *y* | | | | |
| 0,010 по *y* | | | | |
| 0,001 по *y* | | | | |

*Варианты индивидуальных заданий.*

| № варианта | Задания | № варианта | Задания |
|---|---|---|---|
| 1. | $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1{,}2 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$ | 2. | $\begin{cases} \cos y + x = 1{,}5 \\ 2y - \sin(x-0{,}5) = 1 \end{cases}$ |
| 3. | $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}5 \\ x - \cos y = 3 \end{cases}$ | 4. | $\begin{cases} \sin(y+0{,}5) - x = 1 \\ \cos(x-2) + y = 0 \end{cases}$ |
| 5. | $\begin{cases} \sin x + 2y = 2 \\ \cos(y-1) + x = 0{,}7 \end{cases}$ | 6. | $\begin{cases} \sin x - 2y = 1{,}6 \\ x + \cos(y+0{,}5) = 0{,}8 \end{cases}$ |
| 7. | $\begin{cases} \cos x + y = 1{,}5 \\ 2x - \sin(y-0{,}5) = 1 \end{cases}$ | 8. | $\begin{cases} \sin(y-1) + x = 1{,}3 \\ y - \sin(x+1) = 0{,}8 \end{cases}$ |
| 9. | $\begin{cases} \sin(x+0{,}5) - y = 1 \\ \cos(y-2) + x = 0 \end{cases}$ | 10. | $\begin{cases} \sin x + y = -0{,}4 \\ 2x - \cos(y+1) = 0 \end{cases}$ |
| 11. | $\begin{cases} \cos(x+0{,}5) + y = 0{,}8 \\ \sin y - 2x = 1{,}6 \end{cases}$ | 12. | $\begin{cases} \sin x - 2y = 1 \\ \cos(y+0{,}5) - x = 2 \end{cases}$ |
| 13. | $\begin{cases} \sin(x-1) = 1{,}3 - y \\ x - \sin(y+1) = 0{,}8 \end{cases}$ | 14. | $\begin{cases} \sin(y+2) - x = 1{,}5 \\ y + \cos(x-2) = 0{,}5 \end{cases}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15. | $\begin{cases} 2y - \cos(x+1) = 0 \\ x + \sin y = -0{,}4 \end{cases}$ | 16. | $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$ |
| 17. | $\begin{cases} \cos(x+0{,}5) - y = 2 \\ \sin y - 2x = 1 \end{cases}$ | 18. | $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}8 \\ x - \cos y = 2 \end{cases}$ |
| 19. | $\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1{,}5 \\ x + \cos(y-2) = 0{,}5 \end{cases}$ | 20. | $\begin{cases} \sin x + 2y = 1{,}6 \\ \cos(y-1) + x = 1 \end{cases}$ |
| 21. | $\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1{,}2 \\ 2y + \cos x = 2 \end{cases}$ | 22. | $\begin{cases} \cos x + y = 1{,}2 \\ 2x - \sin(y - 0{,}5) = 2 \end{cases}$ |
| 23. | $\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0{,}5 \\ y - \cos x = 3 \end{cases}$ | 24. | $\begin{cases} \sin(x+0{,}5) - y = 1{,}2 \\ \cos(y-2) + x = 0 \end{cases}$ |
| 25. | $\begin{cases} \sin y + 2x = 2 \\ \cos(x-1) + y = 0{,}7 \end{cases}$ | 26. | $\begin{cases} -\sin(x+1) + y = -1{,}2 \\ -2x - \cos y = -2 \end{cases}$ |

## *Лабораторная № 4. Программирование методов решения нелинейных уравнений и систем*

*Задание к работе*

1) Составить блок-схему расчетов по заданному алгоритму.

2) Написать на указанном преподавателем языке программу с удобным интерфейсом, реализующую этот алгоритм.

3) Продемонстрировать работу программы на задаваемых преподавателем тестовых примерах.

4) Подготовить отчет, включающий

а) название и описание алгоритма;

б) блок-схему;

в) текст программы;

г) копии экрана, отражающие интерфейс;

д) тестовые примеры и результаты расчетов по ним.

*Варианты алгоритмов*

| № | Алгоритм |
|---|---|
| 1 | Уточнение корней уравнения методом деления отрезка пополам |
| 2 | Уточнение корней уравнения методом хорд |
| 3 | Уточнение корней уравнения методом Ньютона |
| 4 | Уточнение корней уравнения упрощенным методом Ньютона |
| 5 | Уточнение корней уравнения методом секущих |
| 6 | Уточнение корней уравнения комбинированным методом |
| 7 | Уточнение корней уравнения методом итераций |
| 8 | Уточнение корней системы уравнений методом Ньютона |
| 9 | Уточнение корней системы уравнений упрощенным методом Ньютона |
| 10 | Уточнение корней системы уравнений методом Ньютона с приближенным вычислением производных |
| 11 | Уточнение корней системы уравнений методом простых итераций |
| 12 | Уточнение корней системы уравнений методом итераций Зейделя |

## 4 Вопросы и тесты для самоконтроля

1)Какая точность будет достигнута при решении нелинейного уравнения методом деления пополам за $N$ шагов? Сколько надо сделать шагов, чтобы получить заданную точность?

2)Проиллюстрировать графически случай, когда при решении нелинейного уравнения метод деления пополам дает на первом шаге большую точность, чем метод хорд.

3)Проиллюстрировать графически случай, когда при решении нелинейного уравнения метод деления пополам дает на первом шаге большую точность, чем метод касательных.

4)Проиллюстрировать графически случай, когда при решении нелинейного уравнения на начальном отрезке имеется единственный корень, но комбинированный метод не применим.

5)Какова связь методов Ньютона и итераций для решения нелинейного уравнения?

6)Какова связь упрощенного метода Ньютона и метода итераций для решения нелинейного уравнения?

7)Какова связь методов хорд и итераций для решения нелинейного уравнения? (Рассмотреть случай, когда метод хорд на всех шагах дает приближение слева.)

8)Проиллюстрировать графически 3 случая решения нелинейного уравнения с отрицательным корнем: а)метод итераций расходится; б)метод итераций сходится, приближаясь к корню с одной стороны; в)метод итераций сходится, приближаясь к корню с двух сторон.

9)Можно ли искать методом итераций корень $x=3$ уравнения $x=x^3-x^2-18$?

10)Вывести формулы метода Ньютона для решения системы четырех нелинейных уравнений.

11)Записать формулы метода Ньютона для решения системы нелинейных уравнений с использованием определителей.

12)Сформулировать и обосновать критерии остановки для процесса решения системы нелинейных уравнений методом итераций.

13)При уточнении корня уравнения $x^3+3x-1=0$ методом хорд на начальном отрезке [0;1] после второго шага получим значение $x=$

1.0,304 2.0,327 3.0,250 4. Все предыдущие ответы ошибочны.

14)При уточнении корня уравнения $x^3+3x+5=0$ методом хорд на начальном отрезке [–2; –1] после второго шага получим значение $x$=

1.–1,158 2.–1,750 3.–1,135 4. Все предыдущие ответы ошибочны.

15)При уточнении корня уравнения $x^3+3x–1=0$ методом хорд на начальном отрезке [0;1] значение $x=0,250$ получается на

1.Первом шаге 2.Втором шаге 3Третьем шаге

16)При уточнении корня уравнения $x^3+3x–1=0$ методом хорд на начальном отрезке [0;1] значение $x=0,318$ получается на

1.Первом шаге 2.Втором шаге 3Третьем шаге

17)При уточнении корня уравнения $x^3+3x+5=0$ методом Ньютона на начальном отрезке [–2; –1] после второго шага получим значение $x$=

1.–1,154 2.–1,181 3.–1,100 4. Все предыдущие ответы ошибочны.

18)При уточнении корня уравнения $x^3+3x+5=0$ методом Ньютона на начальном отрезке [-2;-1] значение $x=-1,155$ получается на

1.Первом шаге 2.Втором шаге 3.Третьем шаге

19)При уточнении корня уравнения $x^3+3x–6=0$ методом Ньютона на начальном отрезке [1;2] после второго шага получим значение $x$=

1.1,288 2.1,467 3.1,500 4. Все предыдущие ответы ошибочны.

20)При уточнении корня уравнения $x^3+3x+5=0$ методом Ньютона на начальном отрезке [-2;-1] значение $x=-1,400$ получается на

1.Первом шаге 2.Втором шаге 3.Третьем шаге

21)При уточнении корня уравнения $x^3+3x–6=0$ упрощенным методом Ньютона на начальном отрезке [1;2] после второго шага получим значение $x$=

1.1,467 2.1,302 3.1,322 4. Все предыдущие ответы ошибочны.

22)При уточнении корня уравнения $x^3+3x+5=0$ упрощенным методом Ньютона на начальном отрезке [–2;–1] после второго шага получим значение $x$=

1.–1,213 2.–1,270 3.–1,400 4. Все предыдущие ответы ошибочны.

23)При уточнении корня уравнения $x^3+3x+5=0$ методом секущих для $x_0=–2$ $x_1=–1$ получим значение $x_2$=

1.–1,213 2.–1,270 3.–1,100 4. Все предыдущие ответы ошибочны.

24)При уточнении корня уравнения $x^3+3x–6= 0$ методом секущих для $x_0=1$ $x_1=2$ получим значение $x_2=$

1.1,200 2.1,301 3.–1,363 4. Все предыдущие ответы ошибочны.

25)При уточнении корня уравнения $x^3+3x–6= 0$ комбинированным методом для начального отрезка [1;2] на первом шаге получен уточненный отрезок [1,200;1,567]

Укажите правильное утверждение

1.Обе границы найдены верно. 2.Обе границы найдены не верно.

3.Одна граница найдена верно, а другая нет.

26)При уточнении корня уравнения $x^3+3x+5= 0$ комбинированным методом для начального отрезка [–2;–1] на первом шаге получен уточненный отрезок [–1,400;–1,100]

Укажите правильное утверждение

1.Обе границы найдены верно. 2.Обе границы найдены не верно.

3.Одна граница найдена верно, а другая нет.

27)При уточнении корня уравнения $x=x-(x^3–2x+2)/20$ методом итераций с начальным приближением $x^0=–2$ значение $x=-1,847$ получается на

1.Первом шаге 2.Втором шаге 3.Третьем шаге

28)При вычислении методом итераций квадратного корня из 12 для начального приближения $x_0=3$ получим значение $x_2=$

1.3,464 2.3,500 3.3,400 4. Все предыдущие ответы ошибочны.

29)При вычислении методом итераций квадратного корня из 18 для начального приближения $x_0=5$ получим значение $x_2=$

1.4,243 2.4,319 3.5,125 4. Все предыдущие ответы ошибочны.

30)На первом шаге решения методом Ньютона системы уравнений

$$\begin{cases} y–2e^x = 0 \\ x+y–2 = 0 \end{cases}$$

при начальном приближении $x^0=1$ $y^0=1$ получены значения $x^1=0,511$ $y^1=1,889$

Укажите правильное утверждение

1.Значения обеих переменных найдены верно.

2.Значения обеих переменных найдены не верно.

3.Значение одной переменной найдено верно, а другой нет.

31)На первом шаге решения методом Ньютона системы уравнений

$$\begin{cases} y–2e^x = 0 \\ x+y–2 = 0 \end{cases}$$

при начальном приближении $x^0=1 \ \ y^0=1$
получены значения $x^1=0{,}311 \ \ y^1=1{,}689$
Укажите правильное утверждение
1.Значения обеих переменных найдены верно.
2.Значения обеих переменных найдены не верно.
3.Значение одной переменной найдено верно, а другой нет.

32)Методом Ньютона решается система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 10x + y^2 = -6{,}5 \\ x_2 - 8y + y^2 = -11{,}5 \end{cases}$$

При $x_0=1{,}000,\ y_0=3{,}000$ получены значения $x_1=0{,}500,\ y_1=1{,}250$
Укажите правильное утверждение
1.Оба значения найдены верно. 2.Оба значения найдены не верно.
3.Одно значение найдено верно, а другое нет.

33)Методом Ньютона решается система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 8x + y^2 = -11{,}5 \\ x_2 - 10y + y^2 = -6{,}5 \end{cases}$$

При $x_0=1{,}000,\ y_0=3{,}000$ получены значения $x_1=-1{,}250,\ y_1=1{,}500$
Укажите правильное утверждение
1.Оба значения найдены верно. 2.Оба значения найдены не верно.
3.Одно значение найдено верно, а другое нет.

34)Методом простых итераций решается система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 10x + y^2 = -6{,}5 \\ x_2 - 8y + y^2 = -11{,}5 \end{cases}$$

При $x_0=1{,}000,\ y_0=2{,}000$ получены значения $x_1=1{,}300,\ y_1=2{,}200$
Укажите правильное утверждение
1.Оба значения найдены верно. 2.Оба значения найдены не верно.
3.Одно значение найдено верно, а другое нет.

35)Методом простых итераций решается система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 8x + y^2 = -11{,}5 \\ x_2 - 10y + y^2 = -6{,}5 \end{cases}$$

При $x_0=1{,}000,\ y_0=3{,}000$ получены значения $x_1=3{,}688,\ y_1=2{,}650$
Укажите правильное утверждение
1.Оба значения найдены верно. 2.Оба значения найдены не верно.
3.Одно значение найдено верно, а другое нет.

36)На втором шаге решения методом простых итераций системы уравнений

$$\begin{cases} x=1-0{,}5\cos(y) \\ y=\sin(x+1)-1{,}2 = 0 \end{cases}$$

при начальном приближении $x^0=1 \ \ y^0=1$

получены приближенные значения $x^2=0,721$ $y^2=–0,213$

Укажите правильное утверждение

1.Значения обеих переменных найдены верно.

2.Значения обеих переменных найдены не верно.

3.Значение одной переменной найдено верно, а другой нет.

37)На втором шаге решения методом простых итераций системы уравнений

$$\begin{cases} x=1–0,5\cos(y) \\ y=\sin(x+1)–1,2 = 0 \end{cases}$$

при начальном приближении $x^0=1$ $y^0=1$

получены приближенные значения $x^2=0,521$ $y^2=–0,213$

Укажите правильное утверждение

1.Значения обеих переменных найдены верно.

2.Значения обеих переменных найдены не верно.

3.Значение одной переменной найдено верно, а другой нет.

38)Методом Зейделя решается система уравнений

$$\begin{cases} x^2 – 10x + y^2 = -6,5 \\ x_2 –8y + y^2 = –11,5 \end{cases}$$

При $x_0=1,000$, $y_0=2,000$ получены значения $x_1=1,150$, $y_1=2,200$

Укажите правильное утверждение

1.Оба значения найдены верно. 2.Оба значения найдены не верно.

3.Одно значение найдено верно, а другое нет.

39)Методом Зейделя решается система уравнений

$$\begin{cases} x^2 – 8x + y^2 = -11,5 \\ x_2 – 10y + y^2 = –6,5 \end{cases}$$

При $x_0=2,000$, $y_0=1,000$ получены значения $x_1=2,063$, $y_1=1,175$

Укажите правильное утверждение

1.Оба значения найдены верно. 2.Оба значения найдены не верно.

3.Одно значение найдено верно, а другое нет.

40)На втором шаге решения методом Зейделя системы уравнений

$$\begin{cases} x=1–0,5\cos(y) \\ y=\sin(x+1)–1,2 = 0 \end{cases}$$

при начальном приближении $x^0=1$ $y^0=1$

получены приближенные значения $x^2=0,511$ $y^2=–0,202$

Укажите правильное утверждение

1.Значения обеих переменных найдены верно.

2.Значения обеих переменных найдены не верно.

3.Значение одной переменной найдено верно, а другой нет.

## Список рекомендуемой литературы

1. Волков, Е.А. Численные методы: учебное пособие / Е.А. Волков. – М: Изд-во «Лань» Наука, 2008. – 256 с.
2. Бахвалов, Н.С Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Бином. Лаборатория знаний, Серия Технический университет, 2003. - 632 с.
3. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.