РУКОВОДСТВО К ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ
по дисциплине

Математические методы в исследования экономики

Направление 38.03.01 Экономика

Практическая работа № 1

РАСЧЕТ СЕБЕСТОИМОСТИ ИЗДЕЛИЯ. ОЦЕНКА ПРИБЫЛЬНОСТИ И ОКУПАЕМОСТИ ИНВЕСТИЦИЙ

Цель работы: изучение математических методов расчета себестоимости единицы изделия, прибыльности и оценки времени окупаемости вложенных инвестиций. Закрепление теоретического материала решением задач по определению себестоимости, прибыли и времени окупаемости.

Расчет производственной себестоимости изделия

Для оценки будущих доходов (прибыли или заработной платы) необходимо определить себестоимость изделия. Себестоимость изделия складывается из всех видов затрат при его производстве. Зная конструкцию изделия и технологию его изготовления, состояние рынка материалов и комплектующих изделий, рынка труда, всегда можно оценить себестоимость производимого изделия. Для этого произведем сначала расчет составляющих частей себестоимости и потом, суммируя все составляющие затрат, получим себестоимость. Все оценки затрат произведем в денежных единицах на единицу изделия.

Пусть $x_м'$ (руб.) – затраты на приобретение материалов и комплектующих изделий в расчете на единицу готовой продукции.

Через $x_с'$ (руб.) обозначим часть фонда заработной платы, приходящуюся на оплату изготовления единицы продукции (сдельная оплата труда). Заметим, что при выплате зарплаты из фонда еще будут вычитаться различные налоги и отчисления, т.е. на руки выдается меньшее количество денег, чем размер фонда заработной платы, т.к. он включает в себя подоходный и другие налоги, различные отчисления в расчете на единицу продукции.

Теперь введем величину $x_о' = x_м' + x_с'$, представляющую собой долю затрат на изготовление одного изделия, которая не зависит от объема производства, т.е. от количества изготавливаемых изделий в единицу времени (например, за месяц).

Далее рассмотрим те расходы на изготовление единицы продукции, которые зависят от объема производства.

Пусть $x_н'$ (руб./мес.) – среднемесячные накладные расходы. Накладные расходы складываются из арендной платы за помещение, затрат на электро-, тепло- и водоснабжение, канализацию, экологию, охрану и безопасность, транспортных и других расходов. Эти затраты не зависят от объемов производства и сбыта (реализации), а имеют постоянный характер. Поэтому накладные расходы удобно рассчитывать на единицу времени (например, один месяц).

Введем $x_{от}'$ (руб./мес.) – среднемесячный фонд оплаты труда (ФОТ), в который включены все виды отчислений от заработной платы.. Из этого фонда будет производиться оплата труда работников предприятия (кроме сдельной оплаты).

Среднемесячные расходы относятся к постоянным затратам. Обозначим их $x_п'$, определяются они из выражения $x_п' = x_н' + x_{от}'$. Найдем долю постоянных затрат, приходящихся на производство одного изделия. Для этого сначала введем в рассмотрение величину V (количество/мес.) – среднемесячный объем выпуска продукции, т.е. количество (в штуках, килограммах, литрах и т.д.) изготавливаемых изделий в месяц. Тогда доля постоянных затрат $x_{пи}'$, приходящаяся на изготовление единицы изделия определится по формуле $x_{пи}' = x_п'/V$. Отсюда следует, что доля постоянных расходов, приходящаяся на единицу изделия, уменьшается с увеличением количества изготавливаемых в месяц изделий, т.е. чем больше объем производства, тем дешевле обходится изготовление продукции.

Себестоимость изготовления изделия (или затраты на изготовление одного изделия) определяется по формуле

$$C_и = x_о' + x_п'/V \quad . \qquad (1)$$

Оценка затрат на реализацию и расчет полной себестоимости

Пусть для реализации, т.е. продажи (розничной или оптовой) готового изделия потребуются дополнительно еще $C_р$ (руб./мес.) затрат на одно изделие. Это могут быть транспортные расходы, арендная плата за место торговли, оклады продавцам, расходы на рекламу и т.д. Расходы $C_р$ вычисляются аналогично расчету себестоимости изготовления единицы изделия.

Введем $x_о'' = x_м'' + x_с''$, где $x_м''$ – затраты на упаковку и другие аналогичные расходы при реализации единицы изделия; $x_с''$– фонд сдельной оплаты при реализации единицы готовой продукции.

Введем также величину $x_п'' = x_н'' + x_{от}''$, где $x_н''$ – среднемесячные накладные расходы, связанные с реализацией товара, расходы на рекламу и т.д.; $x_{от}''$ – среднемесячный фонд оплаты труда (кроме сдельной) при реализации единицы продукции.

Тогда затраты на реализацию единицы продукции составят $C_р = x_о'' + x_п''/V$, где V – ежемесячный объем продаж.

Таким образом, если каждый месяц производится и реализуется продукция в объеме V, то расходы, включая фонд заработной платы, составят

$$C = C_и + C_р = x_о + x_п/V \ , \qquad (2)$$

где $x_о = x_о' + x_о''$, $x_п = x_п' + x_п''$. Величину C можно назвать полной себестоимостью, так как она включает в себя все затраты на изготовление продукции и расходы на ее реализацию.

Оценка налога на добавленную стоимость

Цена, по которой изделие покупается потребителем, определяется на рынке и является компромиссом между продавцом, стремящимся получить возможно большую сумму, и покупателем, который, естественно, желает заплатить как можно меньше. Это и есть реальная (или рыночная) цена изделия. Рыночная цена изделия не стабильна и зависит от спроса и предложения, которые, в свою очередь, определяются массой различных объективных и субъективных факторов (сезоном, качеством изделия, его дизайном, наличием в продаже аналогичных изделий и т.д.).

Если изделие сезонное, то безубыточность и доходность дела надо прогнозировать на сезон. В остальных случаях следует строить прогноз на более или менее продолжительный период времени, например, на полгода или год. Для этого сначала нужно оценить расходы на реализацию.

После определения полной себестоимости изделия С необходимо определить цену, по которой следует его продавать. Дело в том, что если вы будете продавать свой товар по себестоимости С, в которой, вообще говоря, учтены все расходы на его производство и реализацию, включая и зарплату, то, тем не менее, вы не сможете полностью скомпенсировать все ваши затраты. Это связано с тем, что в соответствии с действующим законодательством вы должны еще заплатить государству налог на добавленную стоимость (НДС). Добавленная стоимость представляет собой разность между стоимостью товара и материальными затратами на его производство и реализацию. Добавленная стоимость создается во всех звеньях процесса производства и реализации продукции, и НДС изымается в государственный бюджет по мере образования этой стоимости в соответствующих звеньях. Налог на добавленную стоимость включается производителями в цену продукции путем ее повышения на величину этого налога. Таким образом, НДС фактически платят не продавцы (производители), а покупатели (потребители), т.е. те, кто расходует свои денежные средства.

Допустим, что средняя розничная цена изделий, аналогичных производимому, сложившаяся на рынке (рыночная цена), составляет $P_р$ (руб.). Продажа изделия по этой цене не означает, что сумма денег $P_р$ будет целиком вашей, так как вы должны еще заплатить НДС и сделать ряд других отчислений.

При заданной величине цены одного $P_р$ изделия размер налога на добавленную стоимость составит:

$$H_д = K_д P_р - H_{дп} . \qquad (3)$$

Здесь: $K_д$ – ставка налога на добавленную стоимость; $H_{дп}$ – налог на добавленную стоимость покупных изделий.

На приобретение материалов затрачена сумма, равная $x_м = x_м' + x_м''$, и НДС на сумму $x_{дп}$, т.е. НДС, равный $H_{дп}$, уплачен на добавленную стоимость количеством $x_м - x_{дп}$. Тогда имеет место равенство $K_д (x_м - x_{дп}) = x_{дп}$.

Отсюда следует формула для вычисления $x_{дп}$:

$$x_{дп} = K_д\, x_м / (1+ K_д).$$

Тогда сумма НДС на единицу изделия с учетом суммы $x_м$, затраченной на приобретение покупных изделий с НДС , определится по формуле

$$H_д = K_д\, [P_р – x_м / (1+ K_д)] . \qquad (4)$$

Оценка безубыточного объема производства

При продаже изделия по цене $P_р$ (руб.) с учетом НДС на руки вы получите сумму

$$P_п = P_р - Н_д , \qquad (5)$$

или, учитывая соотношение (4),

$$P_п = (1 - К_д) P_р + К_д x_м / (1+ К_д) . \qquad (6)$$

Определим объем производства $V_р$, при котором предприятие при существующих издержках на производство единицы изделия С, будет безубыточно. Это будет иметь место, если вырученные от реализации единицы продукции денежные средства в количестве $P_п$ будут равны себестоимости С, т. е. $P_п = С$. Это точка пересечения кривой издержек C=C(V) и прямой, задаваемой выражением (6). Учитывая формулу (2) , получим

$$V_р = x_п / (P_п - x_о) . \qquad (7)$$

Точка $V= V_р$ — точка безубыточности. Если ежемесячный объем производства и реализации продукции V будет меньше, чем $V_р$, то ваше дело убыточное и вы не сможете скомпенсировать свои затраты. Если $V= V_р$, то убытка производство вам не принесет (вы скомпенсируете свои затраты и выплатите предусмотренную зарплату своим сотрудникам), но дополнительной прибыли вы также не получите. В случае же, когда $V > V_р$, у вас будет еще и некоторая прибыль.

Оценка будущей прибыли

Допустим, что спрос на ваш товар высокий и вы продаете его по рыночной цене $P_р$, превышающей полную себестоимость С, т.е. получаемая вами сумма $P_п$ больше, чем С ($P_п$ >С). В этом случае у вас образуется прибыль. В соответствии с действующим законодательством за полученную прибыль вы обязаны платить налог на прибыль, т.е. разность $P_п - С$ не будет еще вашим дополнительным доходом или чистой прибылью. Из этой суммы необходимо уплатить налог на прибыль.

Пусть $К_п$ - ставка налога на прибыль. Тогда величина налога на прибыль составит

$$Н_п = К_п (P_п - С) \qquad (8)$$

и ваша прибыль на единицу изделия $P_п$ будет равна

$$P_{пр} = (1 – K_п)(P_п – C). \qquad (9)$$

Полная прибыль P_v от реализации продукции в объеме V равняется

$$P_v = V\,P_{пр}. \qquad (10)$$

Оценка окупаемости инвестиций

В предыдущих расчетах не были учтены первоначальные капиталовложения на организацию производства. Эти капиталовложения (как и капиталовложения на расширение производства) часто называются инвестициями.

Пусть $Y_и$ (руб.) – размер ваших первоначальных инвестиций, например, затраты на приобретение помещения, станков, инструментов и другие необходимые покупки. Они не вошли в себестоимость изделия. Рассмотрим, как можно оценить срок окупаемости этих инвестиций.

1. Для окупаемости первоначальных инвестиций ваше предприятие должно быть прибыльным. Это возможно при среднемесячном объеме производства и реализации V, превосходящем точку безубыточности $V_р$. Если условие $V > V_р$ выполняется, то ваши первоначальные расходы $Y_и$ окупятся через время T_1 (мес.), определяемое по формуле

$$T_1 = Y_и \,/\, (V\,P_{пр}), \qquad (11)$$

где $P_{пр}$ определяется из (9). Величину T_1 можно понимать и как время (измеряемое, например, в месяцах), необходимое для накопления суммы денег $Y_и$.

2. Рассмотрим теперь случай, когда вы решили модернизировать уже действующее производство. Допустим, что раньше вы регулярно выпускали V изделий в месяц при полной себестоимости одного изделия С (2). Производство приносило прибыль $P_{пр}$ (9). Вы решили расширить свое производство путем инвестиций (капитальных вложений) на сумму $Y_и$, например, приобрести новое оборудование, помещение, расширить сбыт или ввести какие-нибудь другие улучшения.

Через какое время окупятся капитальные вложения $Y_и$,?

Поскольку изменилось все производство и условия сбыта готовой продукции, то изменятся, вообще говоря, все расходы. Пусть после модернизации величина $x_о$, представляющая расходы на материалы, покупные изделия, на сдельную оплату труда и т.д. стала равной $x_{ои}$ (в том числе, затраты на материалы $x_{ми}$). Постоянные ежемесячные расходы $x_п$ стали равными $x_{пи}$. Соответственно, количество выпускаемой продукции ежемесячно V стало равной $V_и$ =.rV.

Тогда, согласно формулам (2), (6) и (9), новая прибыль $P_{при}$ будет равняться

$$P_{при} = (1 - K_п)\,[(1 - K_д)\,P_р + K_д\, x_{ми}/(1 + K_д) - x_{ои} - x_{пи}/V_и]\,, \qquad (12)$$

если вся продукция в количестве $V_и$ будет реализована. Тогда время окупаемости T_2 определится по формуле

$$T_2 = Y_и \;/\; (V_и\, P_{при}) \quad . \qquad (13)$$

3. Но T_2 - это время окупаемости затрат $Y_и$ не только за счет сделанных капиталовложений и соответственного увеличения прибыли. Оно зависит также и от состояния производства до модернизации. Действительно, вы и раньше получали прибыль с одного изделия, которая равнялась $P_{пр}$. Увеличение прибыли за один месяц только за счет инвестиций равняется разности ($V_и\, P_{при} - V\, P_{пр}$), поэтому для определения срока окупаемости только за счет выигрыша от инвестиций получим выражение

$$T_3 = Y_и \;/\; (V_и\, P_{при} - V\, P_{пр})\,. \qquad (14)$$

Решение задачи

Заданы: затраты при производстве и реализации изделия: $x_м'$, $x_с'$, $x_м''$, $x_с''$(тыс. руб.), $x_н'$, $x_{от}'$, $x_н''$, $x_{от}''$(тыс. руб./мес.); ставки налога на добавленную стоимость $K_д$ и налога на прибыль $K_п$; цена $P_р$ (тыс. руб.), по которой реализуются изделия; единовременные капитальные вложения (инвестиции) $Y_и$ (тыс. руб.), расходы $x_{ои}$, $x_{ми}$, $x_{пи}$ (тыс. руб.), количество продукции $V_и$ (штук/месяц) после модернизации.

При расчетах принимать $V_и = r\, V_р$, где r - безразмерный коэффициент.

Требуется:

– определить налог на добавленную стоимость $Н_д$ по формуле (4) и точку безубыточности $V_р$ по формуле (7);

– для значений $V_1 = 0.5V_р$, $V_2 = 0.8V_р$, $V_3 = V_р$, $V_4 = 1.5V_р$, $V_5 = 2V_р$, $V_6 = 2.5V_р$ (размерность V_i – шт./мес.) вычислить и построить графики зависимостей:

– $C = C(V)$ по формуле (2);

– $P_{пр} = P_{пр}(V)$ по формуле (9);

– $P_v = V\, P_{пр}$. по формуле (10);

– $T_1 = T_1(V)$ по формуле (11).

– $T_2 = T_2(V)$ по формуле (13).

– $T_3 = T_3(V)$ по формуле (14).

Расчеты по работе необходимо свести в табл.1.

Таблица 1

Объем производства	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
Себестоимость изделия С						
Прибыль от 1 ед.изделия $P_{пр}$						
Прибыль от всей партии P_v						
Время окупаемости первоначальных инвестиций T_1						
Время окупаемости инвестиций на модернизацию производства T_2						
Время окупаемости за счет выигрыша от инвестиций T_3						

Пояснительная записка к лабораторным работам должна содержать:
1. Ф.И.О. студента, номер группы.
2. Название темы лабораторной работы. Номер варианта.
3. Постановка задачи. Исходные данные.
4. Описание методики решения задачи. Расчетные формулы.
5. Решение задачи. Результаты расчетов в виде таблиц и графиков.
6. Выводы и рекомендации по результатам выполненной работы.

Варианты исходных данных представлены в табл.2.

Варианты исходных данных

Т а б л и ц а 2

Вари-ант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_м'$	12	15	10	11	28	33	8	17	19	30
$x_с'$	10	20	14	13	19	35	12	15	17	24
$x_н'$	240	125	260	210	890	440	350	450	760	900
$x_{от}'$	300	300	350	460	240	240	270	740	380	460
$x_м''$	3	2	4	3	5	3	4	2	3	2.5
$x_с''$	0.7	0.9	1.4	5	8	9	3	4	3	9

$x_н''$	12	10	8	33	55	14	30	35	15	54
$x_{от}''$	20	35	10	17	30	50	100	28	16	260
$P_р$	60	90	150	135	155	118	120	160	140	145
$Y_и$	2130	1500	1600	1400	3000	3500	5000	6000	1200	2500
$x_{ои}$	16	14	20	80	25	30	18	26	20	70
$x_{пи}$	600	400	1000	350	1000	1000	1500	700	1800	1400
$x_{ми}$	12	11	15	60	20	23	14	21	17	1300
r	1.2	2	3	1.5	3	2.5	3	1.4	2.5	2.2

Практическая работа №2
ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ЕЕ ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Цель работы: построение математической модели и решение оптимизационной задачи линейного программирования.

Нередко на практике возникают задачи оптимизации какого-либо процесса по выбранному критерию. В данной работе рассматривается задача построения математической модели и её оптимизация графическим методом линейного программирования.

Постановка задачи.

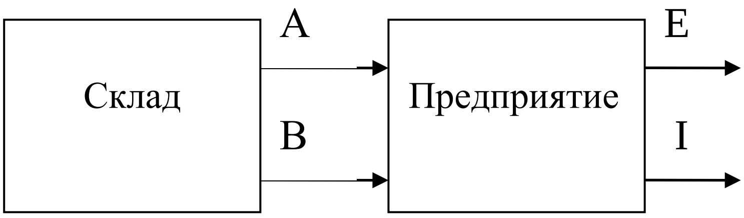


Рис.1

Небольшое предприятие (рис.1) выпускает два вида изделий E и I. Продукция обоих видов поступает в продажу. Для производства требуется два исходных продукта – A и B. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов на складе предприятия составляют b_1 и b_2 соответственно.

Расходы продуктов A и B на единицу соответствующего изделия приведены в табл.1.

Таблица 1

Исходный продукт	Расход исходного продукта на единицу изделия		Максимально возможный запас
	E	I	
A	a_{11}	a_{12}	b_1
B	a_{21}	a_{22}	b_2

Цена одной единицы изделия E равна C_e и C_i для I.

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на изделие I никогда не превышает спроса на изделие E более чем на b_3. Кроме того установлено, что спрос на изделие I никогда не превышает b_4.

Каков должен быть объем производства каждого вида изделия в сутки, чтобы доход от реализации был максимальным?

Построение математической модели.

Процесс построения математической модели для решения поставленной задачи можно начать с ответов на три следующих вопроса:

1. Для определения каких величин должна быть построена модель? Другими словами, как идентифицировать переменные (искомые величины) данной задачи.
2. Какие ограничения должны быть наложены на переменные, чтобы выполнялись условия и ограничения, характерные для данной задачи?
3. В чем состоит цель решения задачи, для достижения которой из всех допустимых значений переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать оптимальному (наилучшему) решению задачи?

Предприятию требуется определить суточные объемы производства каждого изделия, максимизирующие доход от реализации продукции с учетом ограничений на спрос и расход исходных продуктов.

Переменные.

X_e - суточный объем производства изделия E.

X_i - суточный объем производства изделия I.

Целевая функция.

$D = D_e+D_j = C_eX_e + C_i X_i$ –доход. от производства и сбыта изделия E и I.

Необходимо определить такие X_e и X_i , при которых совокупный доход D достигает максимума.

Ограничения.

При решении рассматриваемой задачи должны быть учтены ограничения на расход исходных продуктов A и B и ограничения по спросу на изготовляемые изделия E и I.

Ограничения на расход исходных материалов запишем следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \text{Расход исходного продукта} \\ \text{для производства всех изделий} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \text{Максимально возможный запас} \\ \text{данного исх. продукта на складе} \end{pmatrix}$$

Принимая во внимание обозначения, принятые в табл.1 запишем ограничения на суточные расходы исходных продуктов:

$$a_{11}X_e + a_{12}X_i \le b_1 \quad - \text{ для продукта A },$$
$$a_{21}X_e + a_{22}X_i \le b_2 \quad - \text{ для продукта B }.$$

Изложенные выше ограничения на спрос запишутся в виде:

$$X_i - X_e \le b_3 \ ,$$
$$X_i \le b_4 \ .$$

Кроме того, переменные X_e и X_i по своему смыслу не могут быть отрицательными:

$$X_e \ge 0, \quad X_i \ge 0.$$

Итак, выпишем математическую модель поставленной задачи.

Целевая функция:

$$D = C_eX_e + C_iX_i \quad \Rightarrow \max \ ,$$

Ограничения:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{ll} a_{11}X_e + a_{12}X_i \le b_1 \ , & (1) \\ a_{21}X_e + a_{22}X_i \le b_2 \ , & (2) \end{array}\right\} - \text{ ограничения на запасы,} \\ \left.\begin{array}{ll} X_i - X_e \le b_3 \ , & (3) \\ X_i \le b_4 \ , & (4) \end{array}\right\} - \text{ ограничения на спрос,} \\ X_e \ge 0 \ , \qquad (5) \\ X_i \ge 0 \ . \qquad (6) \end{cases}$$

Требуется максимизировать значение целевой функции (т.е. доход).

Математическая модель поставленной задачи относится к задаче линейного программирования. Для ее решения в общем случае используется симплекс–метод. В случае двух переменных удобно использовать простой и наглядный графический метод решения.

Графическое решение задачи линейного программирования.

В соответствии с заданными ограничениями в пространстве переменных X_e и X_i необходимо построить область допустимых решений(ОДР) поставленной задачи. Допустимая область переменных представляет некоторый выпуклый многоугольник.

Для нахождения оптимального решения, необходимо выяснить в каком направлении возрастает целевая функция $D = C_eX_e + C_i X_i$. С этой целью, в

ОДР наносят ряд параллельных линий равного уровня значений целевой функции при нескольких произвольно выбранных и последовательно возрастающих значениях D. Это позволяет определить наклон целевой функции и направление, в котором происходит её увеличение. Чтобы найти оптимальное решение, следует перемещать прямую равного дохода, в направлении возрастания целевой функции до тех пор, пока она не сместится в область недопустимых значений переменных. Точка перехода из ОДР в область недопустимых значений соответствует оптимальному решению.

Практическая часть.

1. В соответствии с исходными данными (табл.3) записать математическую модель.
2. В соответствии с ограничениями (1) – (9) построить область допустимых решений АБВГДЕ в пространстве параметров X_e, X_i (рис.2).
3. Построить линии равных уровней целевой функции D (пунктирные линии на рис.2) и определить направление ее увеличения.
4. Определить оптимальные значения суточных объемов производства X_e и X_i изделий E и I обеспечивающие максимум целевой функции.
5. Рассчитать значения целевой функции D в узлах ОДР (табл.2) и сравнить полученные значения целевой функции D и координат оптимального решения X_e и X_i с решениями, полученными графически.

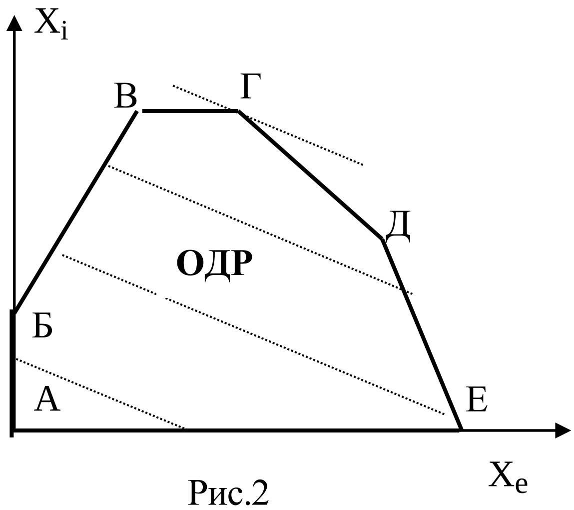


Рис.2

Таблица 2

Узлы ОДР	X_e	X_i	D
А			
Б			
В			
Г			
Д			
Е			

6. Выяснить, какие ограничения мешают дальнейшему увеличению дохода и выдать рекомендации по ослаблению этих ограничений.

Варианты исходных данных

Таблица 3

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a_{11}	1	1,1	1,2	1,3	0,9	1,3	1,4	1,2	1	1,2
a_{12}	2	1,9	2	2	2,2	1,8	2,1	1,9	2	1,9

	a_{21}	2	1,9	2	1,9	2,3	1,9	2	2	2	1,9
	a_{22}	1	1	1,2	1,1	0,9	1	0,8	0,9	1	1,1
	b_1	6	6	5,9	6,1	6,2	6,3	6,5	6	6	5
	b_2	8	8	7,9	8,1	8,3	8,2	8,4	8,2	8	7
	b_3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	b_4	2	2,2	2,1	2	2,3	2,2	1,9	1,8	2,1	1,9
	C_e	5	4,5	4	3,5	3	2,5	2	2,5	3,5	4
	C_i	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	4,5	4	3,5

Практическая работа №3

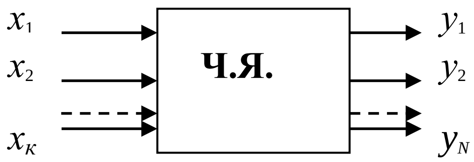
Методы оптимизации в задачах нелинейного программирования.

ПОСТРОЕНИЕ ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Цель работы: Изучение способа построения имитационной модели сложной системы по результатам полного факторного эксперимента. Анализ точности полученных моделей.

Теоретические положения.

1. Значения факторов в имитационном эксперименте. *Планирование эксперимента* – это процедура выбора количества и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи получения регрессионной модели системы с требуемой точностью. Для дальнейшего изложения методики получения РМ сложных систем, воспользуемся моделью «черного ящика» (ЧЯ), с которым мы и будем проводить имитационные эксперименты.



Стрелки y_i, $(i=\overline{1,N})$, изображают численные характеристики целей исследования. Их называют параметрами оптимизации или выходами «черного ящика».

Для проведения эксперимента необход

стемы. Все способы таких воздействий обозначим x_j $(j=\overline{1,k})$. Эти входные воздействия x_j называются *факторами* или входами «черного ящика».

Задача планирования эксперимента возникает в связи с необходимостью построения имитационной или регрессионной модели (РМ) исследуемой системы. Под РМ понимается уравнение, связывающее параметр оптимизации с входными факторами системы. В общем виде это уравнение можно записать так:

$$y = \varphi(x_1, x_2, ..., x_k). \tag{1}$$

Функция φ называется функцией отклика системы.

Каждый фактор x_j может принимать в опыте одно или несколько значений. Такие значения будем называть уровнями. Фиксированный набор уровней факторов определяет одно из возможных состояний системы («черного ящика»). Одновременно это есть условия проведения одного из возможных опытов.

Пусть на предварительных этапах исследования установлена область изменения факторов x_j:

$$x_j^{\min} \le x_j \le x_j^{\max} \tag{2}$$

и координаты нулевого (основного) уровня

$$x_{j0}\ , \quad (j = \overline{1,k})\ , \tag{3}$$

которые должны лежать внутри области изменения (или определения) факторов. Построение плана имитационного эксперимента сводится к выбору экспериментальных значений факторов x_j, симметричных относительно центра эксперимента x_{j0} (основного уровня). Для каждого фактора выберем два уровня (верхний и нижний), которые он будет принимать в эксперименте. Для этого зададимся интервалом варьирования факторов.

Интервалом варьирования факторов называется некоторое число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний, а вычитание – нижний уровни фактора.

Для упрощения записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных введем нормированные значения факторов так, чтобы верхний уровень соответствовал значению +1, нижний –1, а основной имел нулевое значение (см. рис.2), т.е.:

$$x_j = \frac{\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j0}}{I_j}\ , \tag{4}$$

где x_j – нормированное значение фактора;

$\tilde{x}_j$ – натуральное значение фактора;

$\tilde{x}_{j0}$ – натуральное значение основного уровня;

I_j – интервал варьирования j-го фактора;

j – номер фактора, $j = \overline{1,k}$.

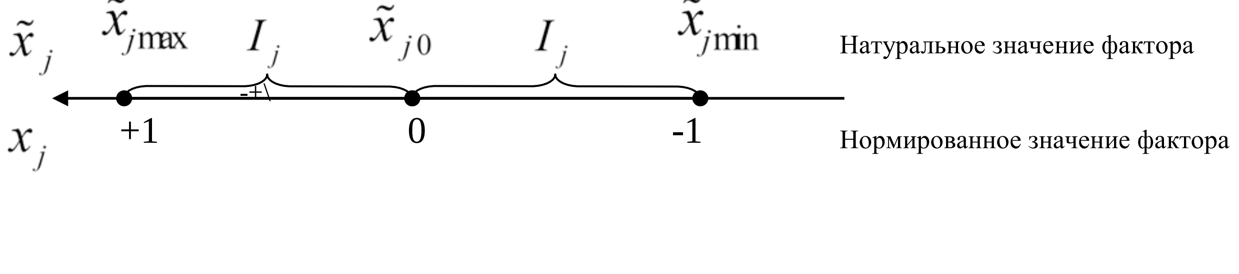


Рис.2

Для качественных факторов, имеющих два уровня, один уровень обозначается $+1$, а другой -1.

На выбор величины интервалов варьирования I_j накладываются естественные ограничения. Интервал варьирования не может быть меньше той ошибки, с которой экспериментатор фиксирует значение фактора. С другой стороны, интервал не может быть настолько большим, чтобы верхний или нижний уровень фактора оказались за пределами области определения.

Если интервал варьирования выбирать достаточно малым и считать, что каждый фактор принимает только два значения, соответствующих верхнему и нижнему уровню:

$$\tilde{x}_j = \begin{cases} \left(\tilde{x}_{j0} + I_j\right) \\ \left(\tilde{x}_{j0} - I_j\right) \end{cases}; \qquad \text{или:} \qquad x_j = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}, \tag{5}$$

то методика решения поставленной задачи построения РМ значительно упрощается. Но при этом возможно сильное увеличение размерности задачи.

При решении задачи оптимизации для первой серии экспериментов стремятся выбрать такую подобласть, которая давала бы возможность пошагового движения к оптимуму. В задачах же интерполяции интервал варьирования охватывает всю область определения фактора.

Таким образом, вся область определения факторов $\tilde{x}_j$ разбивается на ряд интервалов. Полученные для каждого интервала решения (уравнения регрессии) «сшиваются» между собой за счет приравнивания граничных условий в местах стыковки соседних интервалов.

2. Полный факторный эксперимент. *Полный факторный эксперимент* (ПФЭ) – это эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания факторов.

Если число значений каждого фактора равно двум ($x_j = \pm 1$), то мы имеем ПФЭ типа 2^k. Тогда, число опытов N, необходимое для реализации всех возможных сочетаний значений k – факторов, определяется по формуле $N = 2^k$.

В табл.1 представлена матрица планирования ПФЭ для двух факторов.

Таблица 1

Условия опыта			Результаты опыта
Номер опыта	x_1	x_2	y

Таблица 2

1	+1	+1	y_1
2	–1	+1	y_2
3	+1	–1	y_3
4	–1	–1	y_4

Номер опыта	x_1	x_2	x_3	y
1	+1	+1	+1	y_1
2	–1	+1	+1	y_2
3	+1	–1	+1	y_3
4	–1	–1	+1	y_4
5	+1	+1	–1	y_5
6	–1	+1	–1	y_6
7	+1	–1	–1	y_7
8	–1	–1	–1	y_8

Для построения матриц планирования ПФЭ с большим числом факторов, чтобы запланировать все возможные реализации факторов, можно использовать правило чередования знаков. Для первого фактора знаки меняются поочередно. Для второго они чередуются через два, для третьего – через четыре, для четвертого – через восемь и т.д. по степеням двойки. Как это выглядит для ПФЭ типа 2^3 показано в табл.2.

3. Полный факторный эксперимент и уравнение регрессии. Применение методики ПФЭ позволяет достаточно просто и эффективно количественно оценить все линейные эффекты факторов и их взаимодействия («перекрестные связи»). Взаимодействие возникает в том случае, если эффект одного фактора зависит от уровня, на котором находится другой фактор. Вначале рассмотрим методику получения линейной РМ.

Линейная регрессионная модель. Уравнение регрессии – это формула статистической связи между зависимыми и независимыми переменными. Если это уравнение линейное, то речь идет о линейной регрессии. Формула статистической связи двух переменных называется парной регрессией, зависимость от нескольких переменных – множественной регрессией.

Установление формы связи (6) начинают, как правило, с рассмотрения линейной регрессии вида

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \ldots + b_k \cdot x_k \,. \tag{6}$$

Целью исследователя является определение неизвестных коэффициентов $b_j \ \ (j = \overline{0,k})$ линейной модели (6) по результатам эксперимента (по матрице ПФЭ

Используя метод наименьших квадратов (МНК) для линейной РМ получим простую формулу

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_{i\,j}\, y_i}{N}\,, \qquad (j = \overline{0,k}), \tag{7}$$

где индекс $j = 0$ относится к фиктивному фактору x_0, который во всех опытах принимает значение +1, т.е. $x_{i0} = +1, \ (i = \overline{1,N}),$ и вводится для удобства пользования формулой (7).

Пример. Подсчитаем коэффициенты для линейной двухфакторной РМ

$$y_{лин} = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 .$$

Для этого воспользуемся значениями x_{ij} и y_i из таблицы 1 для ПФЭ типа 2^2. По формуле (7) получим:

$$b_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}; \quad b_1 = \frac{y_1 - y_2 + y_3 - y_4}{4}; \quad b_2 = \frac{y_1 + y_2 - y_3 - y_4}{4}.$$

Коэффициент b_0 есть среднее арифметическое значение параметра оптимизации, а коэффициенты b_j $(j = \overline{1,k})$ указывают на силу влияния факторов x_j.

Нелинейная регрессионная модель. Если при проверке гипотезы о линейности РМ устанавливается, что статистический материал (или результат ПФЭ) не может быть описан линейным уравнением, то переходят к поиску нелинейной модели. Пользуясь результатами ПФЭ можно достаточно просто построить нелинейную модель, включающую эффекты взаимодействия («перекрестные связи») факторов: парные ($x_1 x_2,\ x_2 x_3, \ldots$), тройные ($x_1 x_2 x_3,\ x_2 x_3 x_4, \ldots$) и т.д. К сожалению, для других видов нелинейностей простой способ построения РМ на основе матрицы ПФЭ типа 2^k не проходит и следует использовать другие более сложные методы, основанные на использовании нелинейного регрессионного анализа.

Максимальное число всех возможных эффектов (всех членов уравнения регрессии, включая b_0), линейные эффекты и взаимодействия всех порядков, можно определить по формуле числа сочетаний

$$C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!} \le N,$$

где k – число факторов, m – число элементов во взаимодействии, N – количество опытов в эксперименте (число строк в матрице планирования ПФЭ).

Для определения коэффициентов в модели при парных взаимодействиях надо, пользуясь правилом перемножения столбцов, получить столбец произведения двух факторов. Для вычисления коэффициента при соответствующем эффекте взаимодействия, с новым вектор-столбцом можно обращаться так же, как с вектор-столбцом любого фактора.

В табл. 3 представлена матрица планирования ПФЭ типа 2^2 с учетом перекрестных связей между факторами.

Т а б л и ц а 3

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	$x_1 x_2$	y
1	+1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	–1	+1	–1	y_2

3	+1	+1	–1	–1	y_3
4	+1	–1	–1	+1	y_4

Полная нелинейная РМ в данном случае имеет следующий вид:

$$y_{нелин} = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 \ . \tag{8}$$

Коэффициент b_{12} вычисляется по прежней формуле (7):

$$b_{12} = \frac{y_1 - y_2 - y_3 + y_4}{4}. \tag{9}$$

Для определения коэффициентов в РМ при тройных взаимодействиях и взаимодействиях более высокого порядка поступают аналогично.

Практическая часть.

Для ПФЭ типа 2^3 (т.е. к=3) в табл. 4 заданы результаты эксперимента y_i, $(i = \overline{1,8})$.

Требуется:

1) Записать матрицу планирования ПФЭ типа 2^3 с учетом перекрестных связей между факторами.
2) По результатам ПФЭ составить линейную имитационную модель исследуемой системы $y = \varphi_{л}(x_1, x_2, x_3)$.
3) По результатам ПФЭ составить полную нелинейную имитационную модель исследуемой системы $y = \varphi_{нл}(x_1, x_2, x_3)$.
4) Рассчитать значения функции y по линейной и нелинейной модели и сравнить их с результатами эксперимента.
5) Сделать выводы , по степени точности полученных .

Задание для самостоятельной работы.

Составить упрощенные нелинейные модели и оценить степень их адекватности. В результате исследования выбрать наиболее простую и адекватную регрессионную модель исследуемой системы.

Варианты исходных данных

Т а б л и ц а 4

Результаты эксперимента	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	2	5	-2	8	-5	1	4	-1	3	10
y_2	4	-4	8	2	-2	-7	8	8	-3	7
y_3	6	-8	-7	-6	-7	5	1	3	5	-5
y_4	8	2	1	9	5	3	-3	5	9	-2
y_5	-1	0	4	-15	3	-2	-5	4	1	1
y_6	-5	3	12	4	9	-8	7	-9	-7	4
y_7	0	-1	9	3	11	0	9	-2	-2	9
y_8	1	7	-7	2	-3	12	5	1	0	-8

Практическая работа №4

АНАЛИЗ СТРАТЕГИИ ПРОДАЖ ПРОДУКЦИИ НА КОНКУРЕНТНОМ РЫНКЕ

Цель работы: изучение математических моделей и методов оптимизации стратегий продаж товара при известной кривой спроса. Закрепление теоретического материала оптимизации цены и количества продукции.

Теоретические положения.

В связи с переходом к рыночным отношениям в экономике процесс назначения цены на произведенную продукцию и математическое моделирование этого процесса стало еще более актуальной проблемой, чем это было при централизованном планировании народного хозяйства. Возникла необходимость исследования реального процесса ценообразования, его моделирования и изучения моделей.

Обычно при назначении цены вычисляют производственные, транспортные и прочие затраты на данное изделие. К этим затратам делается некоторая надбавка, которая определяет прибыль, т.е. цена в основном определяется издержками на изделие. Но этот способ определяет только наименьшее значение цены, ниже которой производство этого изделия становится убыточным. Такая теоретическая или затратная цена может значительно отличаться от реальной или рыночной цены. Здесь прежде всего не учитывается один из самых главных факторов: найдутся ли покупатели на это изделие по назначенной цене, т.е. имеется ли спрос на данный товар по такой цене.

Таким образом, при назначении цены продукции нельзя ограничиваться только расчетом издержек, а необходимо провести маркетинговое исследование рынка. Изучение возможностей рынка – это адаптивный процесс. Приемлемое значение цены удается установить только путем пробного маркетинга, наблюдения за процессом торговли и принятия решения по ситуации.

Рыночная цена изделия, вообще говоря, не зависит от затрат на его производство, а определяется наличием покупателей, причем число потенциальных покупателей будет зависеть от назначенной цены на продукцию. Зависимость числа покупателей, следовательно, и количества потенциально реализуемых изделий Q от назначенной цены C_d называется кривой спроса. Кривая спроса записывается в виде функции $C_d = C_d(Q)$ и является, обычно, убывающей функцией и в дальнейшем предполагается, что она существует, единственная и монотонно убывающая положительная функция. Таким образом, ввиду монотонности, каждому значению $Q>0$ соответствует единственное значение $C_d>0$ и, наоборот, значению C_d из интервала $C_a>C_d>0$ соответствует единственное значение $Q>0$. Здесь величина C_a - наименьшая цена из множества всех цен, по которым товар в регионе не будет реализовываться. Это означает, что только при $C_d < C_a$ найдется хотя бы один покупатель на товар. Здесь исключается абсолютно неэластичный спрос (кривая спроса вида Q=const).

Зависимость затрат (себестоимости) на производство единицы изделия от количества произведенной продукции назовем кривой издержек и обозначим $C_e = C_e(Q)$. Эту функцию будем считать заданной. В дальнейших выкладках и расчетах налоги не учитываются.

Переменная величина Q входит в выражения для кривых спроса и издержек. В этих зависимостях Q , вообще говоря, обозначает разные величины. В кривой спроса – это количество потенциально реализуемой продукции по соответствующей цене, а в кривой издержек – количество произведенной продукции. Будем предполагать, что процессы производства и реализации идут непрерывно, а произведенная за некоторый промежуток времени продукция полностью реализуется за этот же промежуток времени (т.е. производится столько товаров, сколько может быть реализовано по назначенной цене – это так называемое идеальное производство).

Рассмотрим случаи определения оптимальной цены, когда кривая спроса и кривая издержек известны априори. В данной работе рассматриваются две самостоятельные задачи.

*Задача 1***. Оптимизация цены и размера партии товара**

А. Аналитическое решение задачи.

Пусть заданы кривая спроса $C_d = C_d(Q)$ и кривая удельных издержек $C_e = C_e(Q)$. Тогда прибыль S(Q) для заданного размера партии Q и при постоянной цене определяется по формуле

$$S(Q) = [C_d(Q) - C_e(Q)]Q . \qquad (1)$$

Требуется найти такие значения цены $C_d = C_m$ и количества изделий $Q = Q_m$, которые приносят максимальную прибыль $S=S_m$.

Необходимое условие максимальной прибыли записывается в виде $dS/dQ=0$. Отсюда определяются значения Q_m и C_m . Эти значения зависят от конкретного вида кривых спроса и издержек.

Рассмотрим частный случай, когда на участке, где $C_d \geq 0$ кривая спроса аппроксимируется прямой линией

$$C_d = C_{d1} - C_{d2}\, Q\ , \tag{2}$$

а кривая удельных издержек (себестоимости) описывается гиперболической функцией вида:

$$C_e = C_{e1} + C_{e2} / Q\ , \tag{3}$$

где величины C_{d1} и C_{d2} – параметры аппроксимации; C_{e1}- доля затрат на изготовление единицы изделия, которая не зависит от объема производства, например, расход материала, комплектующих изделий и т.д.; C_{e2} - постоянная часть расходов (например, за аренду помещения, освещение и т.д), приходящаяся на время производства изделий в количестве Q, а время производства и реализации считаем единичными.

При этих предположениях прибыль S за единичный интервал времени равняется

$$S = (C_{d1} - C_{e1} - C_{d2}Q)Q - C_{e2}\ . \tag{4}$$

Из условия $dS/dQ=0$ получим, что оптимальное количество изделий равняется

$$Q_m = (C_{d1} - C_{e1}\ ) / (2\, C_{d2})\ , \tag{5}$$

а оптимальная цена при этом

$$C_m = (C_{d1} + C_{e1}\ ) / 2\ . \tag{6}$$

Подставляя Q_m в (4), получим $S = S_m$.

Б. Численное решение задачи.

Для численного решения задачи определения оптимальной цены и партии изделий требуется построить график зависимости прибыли S от размера партии Q по формуле (1).

Оптимальные значения количества изделий Q_m и цены C_m соответствуют точке максимума на графике прибыли S(Q).

Задача 2. Оптимальная стратегия продажи заданной партии товара

В этой задаче считается заданным размер партии товара $Q_п = Q_m$, который необходимо продать так, чтобы получить максимальную прибыль. Функции спроса (2) и удельных издержек (3) остаются неизменными из задачи 1.

Рыночная практика показывает, что большую партию товара обычно продают по частям, начиная с высокой цены и постепенно снижая цену по мере насыщения рынка и уменьшения спроса.

В данной работе, для простоты всю партию товара $Q_п$ разделим на две части Q_1 и Q_2 (рис.1):

$$Q_п = Q_1 + Q_2, \tag{7}$$

которые продаются в два приема по ценам C_1 и C_2. Требуется определить оптимальные размеры частей Q_1 и Q_2 и их цены C_1 и C_2, обеспечивающие максимальный размер получаемой в результате продажи суммарной прибыли S. Задачу требуется решить аналитическим и численным методами.

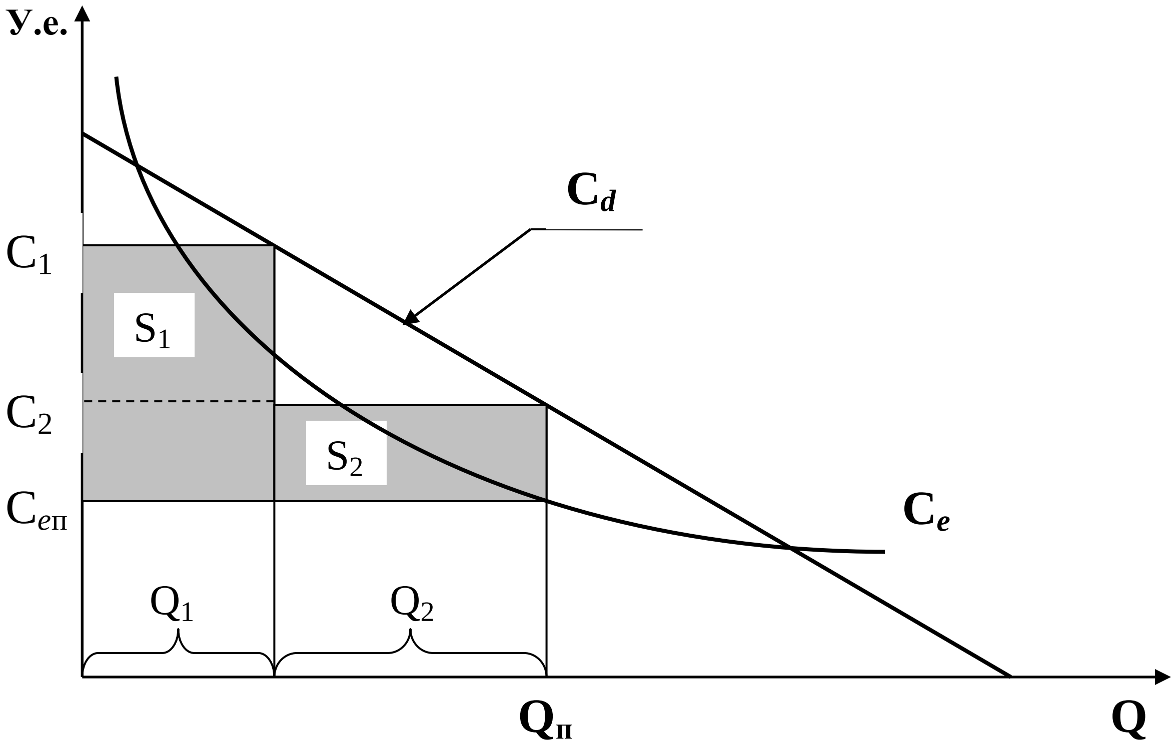


Рис.1

А. Аналитическое решение задачи.

В данной задаче общая прибыль складывается из прибылей, полученных от продажи двух частей партии товара. При расчетах будем считать, что удельные затраты $C_{еп}$ зависят только от размера партии товара $Q_п$ и не зависят от размера частей партии.

$$S = S_1(Q_1, C_1) + S_2(Q_2, C_2) = Q_1\ C_1 + (Q_п - Q_1)\ C_2 - C_{еп}\ Q_п = \ldots \tag{8}$$

Записывая необходимое условие максимума прибыли $dS / dQ_1 = 0$ определим оптимальное значение части партии Q_{1m}. Затем, по формулам (7) и (2) найдем оптимальные значения Q_{2m}, C_{1m} и C_{2m}.

Сравните полученное значение прибыли в задаче 2 с прибылью, рассчитанной в задаче 1.

Б. Численное решение задачи.

Для численного решения поставленной задачи требуется построить график зависимости прибыли S от размера части партии Q_1 по формуле (8). Для этого необходимо заполнить табл.1, в которой следует изменять значение Q_1 от 0 до $Q_п$.

Т а б л и ц а 1.

$Q_п = \ldots;$ $C_{еп} = \ldots;$ $C_2 = \ldots$

Q_1	0					$Q_п$
C_1						
$Q_2 = Q_п – Q_1$						
$Д = Q_1 C_1 + Q_2 C_2$						
$S = Д – C_{еп} Q_п$						

Порядок выполнения работы.

1. В соответствии с формулами (2), (3) построить совмещенный график спроса и удельных издержек (себестоимости). Определить две точки безубыточности, определяющие объем производства продукции и объем продаж.

2. Получить решение задачи 1 аналитическим и численным методами. Полученную оптимальную точку нанести на совмещенный график спроса – себестоимости.

3. Получить решение задачи 2 аналитическим и численным методами.

4. Сделать выводы и рекомендации по оптимизации объема производства и стратегии сбыта продукции.

Задание для самостоятельной работы.

Для заданных кривых спроса и себестоимости:

1. Определить оптимальные размеры частей Q_i (i=1,2,3,…,n) для общего случая деления партии товара на n–частей:

$$Q_п = \sum_{i=1}^{n} Q_i .$$

2. Для оптимальных Q_i рассчитать оптимальный размер партии товара $Q_п$ в зависимости от числа n

Исходные данные для выполнения работы представлены в табл.2

Варианты исходных данных

Т а б л и ц а 2

Вари-ант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_{d1}	8	0.5	12	25	3	31	15	8	1.5	50
C_{d2}	1.2	0.1	2	7	0.4	6	3	0.9	0.3	12
C_{e1}	2	0.1	3	5	0.5	10	4	1.5	0.8	8
C_{e2}	0.3	0.02	0.5	1	0.1	0.8	1	0.1	0.2	1

ПОСТРОЕНИЕ ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Цель работы: Изучение способа построения имитационной модели сложной системы по результатам полного факторного эксперимента. Анализ точности полученных моделей.

Теоретические положения.

1. Значения факторов в имитационном эксперименте. *Планирование эксперимента* – это процедура выбора количества и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи получения регрессионной модели (РМ) системы с требуемой точностью. Для дальнейшего изложения методики получения РМ сложных систем, воспользуемся моделью «черного ящика» (ЧЯ), с которым мы и будем проводить имитационные эксперименты.

Рис. 1

Стрелки y_i, $(i=\overline{1,N})$, изображают численные характеристики целей исследования. Их называют параметрами оптимизации или выходами «черного ящика».

Для п[illegible]эксперимента н[illegible] поведение системы. Все способы таких воздействий обозначим x_j $(j=\overline{1,k})$. Эти входные воздействия x_j называются *факторами* или входами «черного ящика».

Задача планирования эксперимента возникает в связи с необходимостью построения имитационной или регрессионной модели (РМ) исследуемой системы. Под РМ понимается уравнение, связывающее параметр оптимизации с входными факторами системы. В общем виде это уравнение можно записать так:

(1) $y=\varphi(x_1, x_2, ..., x_k)$. Функция φ называется функцией отклика системы.

Каждый фактор x_j может принимать в опыте одно или несколько значений. Такие значения будем называть уровнями.

Для каждого фактора выберем два уровня (верхний и нижний), которые он будет принимать в эксперименте. Для упрощения записи условий эксперимента и обработки данных введем нормированные значения факторов так, чтобы верхний уровень соответствовал значению +1, нижний –1

2. Полный факторный эксперимент. *Полный факторный эксперимент* (ПФЭ) – это эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания факторов.

Если число значений каждого фактора равно двум ($x_j = \pm 1$), то мы имеем ПФЭ типа $2^к$. Тогда, число опытов N , необходимое для реализации всех возможных сочетаний значений k – факторов, определяется по формуле $N=2^k$

В табл.1 представлена матрица планирования ПФЭ для двух факторов, для трёх - в табл.2.

Условия опыта			Результаты опыта
Номер опыта	X_1	X_2	y
1	+1	+1	y_1
2	–1	+1	y_2
3	+1	–1	y_3
4	–1	–1	y_4

Номер опыта	X_1	X_2	X_3	y
1	+1	+1	+1	y_1
2	–1	+1	+1	y_2
3	+1	–1	+1	y_3
4	–1	–1	+1	y_4
5	+1	+1	–1	y_5
6	–1	+1	–1	y_6
7	+1	–1	–1	y_7
8	–1	–1	–1	y_8

3. Полный факторный эксперимент и уравнение регрессии. Применение методики ПФЭ позволяет достаточно просто и эффективно количественно оценить все линейные эффекты факторов и их взаимодействия («перекрестные связи»). Взаимодействие возникает в том случае, если эффект одного фактора зависит от уровня, на котором находится другой фактор. Вначале рассмотрим методику получения линейной РМ.

Линейная регрессионная модель. Уравнение регрессии – это формула статистической связи между зависимыми и независимыми переменными. Если это уравнение линейное, то речь идет о линейной регрессии. Формула статистической связи двух переменных называется парной регрессией, зависимость от нескольких переменных – множественной регрессией.

Установление формы связи (6) начинают, как правило, с рассмотрения линейной регрессии вида

(6) $y=b_0+b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_kx_k$.

Целью исследователя является определение неизвестных коэффициентов b_i линейной модели (6) по результатам эксперимента (по матрице ПФЭ). Используя метод наименьших квадратов (МНК) для линейной РМ получим простую формулу

(7) $b_j = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_{ij}\, y_i}{N}$, $(j=\overline{0,k})$, где индекс $j=0$ относится к фиктивному фактору x_0, который во всех опытах принимает значение +1, и вводится для удобства пользования формулой (7).

Пример. Подсчитаем коэффициенты для линейной двухфакторной РМ $y_{лн}=b_0+b_1x_1+b_2x_2$.

Для этого воспользуемся значениями x_{ij} и y_i из таблицы 1 для ПФЭ типа 2^2. По формуле (7) получим: $b_0 = \dfrac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}$; $b_1 = \dfrac{y_1-y_2+y_3-y_4}{4}$; $b_2 = \dfrac{y_1+y_2-y_3-y_4}{4}$.

Коэффициент b_0 есть среднее арифметическое значение параметра оптимизации, а коэффициенты b_j $(j=\overline{1,k})$ указывают на силу влияния факторов x_j.

Нелинейная регрессионная модель. Если при проверке гипотезы о линейности РМ устанавливается, что статистический материал (или результат ПФЭ) не может быть описан линейным уравнением, то переходят к поиску нелинейной модели. Пользуясь результатами ПФЭ можно достаточно просто построить нелинейную модель, включающую эффекты взаимодействия («перекрестные связи») факторов: парные (x_1x_2, $x_2x_3,\ldots$), тройные ($x_1x_2x_3$, $x_2x_3x_4,\ldots$) и т.д.

Для определения коэффициентов в модели при парных взаимодействиях надо, пользуясь правилом перемножения столбцов, получить столбец произведения двух факторов.

В табл. 3 представлена матрица планирования ПФЭ типа 2^2 с учетом перекрестных связей между факторами.

№ опыта	X_0	X_1	X_2	$X_1\,X_2$	y
1	+1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	–1	+1	–1	y_2
3	+1	+1	–1	–1	y_3
4	+1	–1	–1	+1	y_4

Полная нелинейная РМ в данном случае имеет следующий вид:

$$y_{нелин} = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 \quad (8)$$

Коэффициент b_{12} вычисляется по прежней формуле (7): $b_{12} = \dfrac{y_1-y_2-y_3+y_4}{4}$. (9)

Для определения коэффициентов в РМ при тройных взаимодействиях и взаимодействиях более высокого порядка поступают аналогично.

Практическая часть. В табл. 4 заданы результаты эксперимента y_i, $(i=\overline{1,8})$. Требуется:

Записать матрицу планирования ПФЭ типа 2^3 с учетом перекрестных связей между факторами.

По результатам ПФЭ составить линейную модель исследуемой системы $y=\varphi_{л}(x_1,x_2,x_3)$.

По результатам ПФЭ составить полную нелинейную модель исследуемой системы $y=\varphi_{нл}(x_1,x_2,x_3)$.

Рассчитать значения функции *y* по линейной и нелинейной модели и сравнить их с результатами эксперимента. Сделать выводы , по степени точности полученных .

Задание для самостоятельной работы.

Составить упрощенные нелинейные модели и оценить степень их адекватности. В результате исследования выбрать наиболее простую и адекватную регрессионную модель исследуемой системы.

Варианты исходных данных

Таблица 4

Результаты эксперимента	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***
y_1	2	5	-2	8	-5	1	4	-1	3	10
y_2	4	-4	8	2	-2	-7	8	8	-3	7
y_3	6	-8	-7	-6	-7	5	1	3	5	-5
y_4	8	2	1	9	5	3	-3	5	9	-2
y_5	-1	0	4	-15	3	-2	-5	4	1	1
y_6	-5	3	12	4	9	-8	7	-9	-7	4
y_7	0	-1	9	3	11	0	9	-2	-2	9
y_8	1	7	-7	2	-3	12	5	1	0	-8

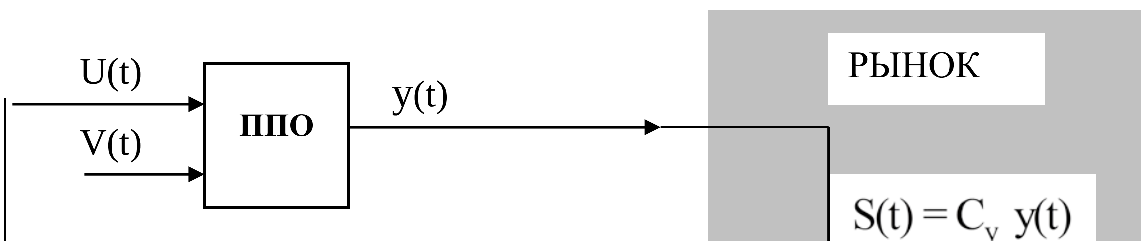
Практическая работа № 5

СТРАТЕГИИ СТАБИЛИЗАЦИИ РАБОТЫ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ОБЪЕКТА В РЫНОЧНЫХ УСЛОВИЯХ

<u>Теоретические положения.</u>

Цель работы: изучение математической модели поведения производственного объекта на рынке, при повышении рыночной стоимости основных производственных фондов. Закрепление теоретического материала расчетом примеров по компенсации производственным объектом последствий повышения рыночной цены на основные производственные фонды.

Модель взаимодействия ППО с рынком. На рис.1 представлена элементарная схема взаимодействия ППО с рынком.



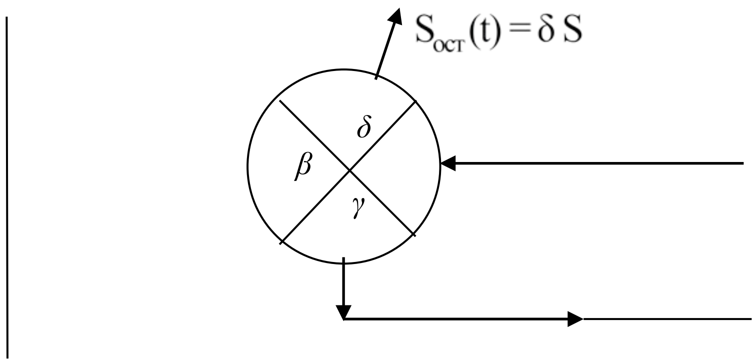


Рис.1

На рисунке:

$S_U(t)$ – поток денег, идущих на приобретение ОПФ,

$S_V(t)$ – поток денег, идущих на приобретение оборотных фондов,

$S_{ост}(t)$ – поток денег, идущих на остальные потребности (зарплата, соцкульт-быт, налоги и др.).

C_y, C_U, C_V – цены единицы изделия, основных и оборотных фондов,

β, γ – доли потока денег, выделяемых на приобретение основных и оборотных фондов, δ – доля оставшегося потока денег:

$$\beta+\gamma+\delta=1. \qquad (1)$$

$$\begin{cases} S_U(t)=\beta\, S(t), \\ S_V(t)=\gamma\, S(t), \\ S_{ост}(t)=\delta\, S(t), \\ S_U(t)+S_V(t)+S_{ост}(t)=S(t)\,. \end{cases} \qquad (2)$$

Продукция в количестве y(t) продается на рынке по цене C_y. В результате выручка S от реализации продукции в количестве y составит сумму

$$S = C_y\, y\,. \qquad (3)$$

Из этих денег приобретаются основные производственные фонды в количестве U по цене C_u на сумму S_u

$$U(t) = S_U / C_U \qquad (4)$$

и оборотные средства в количестве V по цене C_V на сумму S_V

$$V(t) = S_V / C_V \,. \qquad (5)$$

Предполагается, что остальные деньги в размере $S_{ост}(t)$ из суммы S тратятся на непроизводственные цели:

$$S_{ост}(t) = S(t) - S_U(t) - S_V(t).. \qquad (6)$$

В схеме не учитывается запаздывание на складирование, транспортировку, сбыт, банковские операции и другие рыночные операции. Также не учитываются важные маркетинговые мероприятия, такие, например, как формирование спроса и предложения, ценообразование, реклама и многое другое. Схема является простейшей базовой моделью взаимодействия ППО с рынком, которую в дальнейшем можно сколько угодно наращивать и усложнять.

Запишем систему соотношений, описывающую представленную на рис.1 замкнутую систему с учетом временного лага на цикл производства.

Модель ППО:

$$\begin{cases} \dfrac{d\ m(t)P(t)}{dt} = U(t) - \alpha P(t)\ , \\ y(t) = k\ V(t - \tau_V)\ , \\ 0 \le y(t) \le P(t)\ . \end{cases} \qquad (7)$$

Модель рынка:

$$\begin{gathered} S(t) = C_y \cdot y(t)\ , \\ S(t) = S_U(t) + S_V(t) + S_{ост}(t)\ , \\ \beta + \gamma + \delta = 1\ , \\ S_U(t) = \beta \cdot S(t)\ , \quad S_V(t) = \gamma \cdot S(t)\ , \quad S_{ост}(t) = \delta \cdot S(t)\ , \\ U(t) = \frac{S_U(t)}{C_U}\ , \qquad V(t) = \frac{S_V(t)}{C_V}\ . \end{gathered} \qquad (8)$$

Здесь: P(t) – производственная мощность объекта;

m(t) – коэффициент фондоемкости продукции;

U(t) – поток основных производственных фондов, поступающих на объект;

α – коэффициент выбытия основных производственных фондов в единицу времени;

y(t) – поток продукции, выпускаемой в объектом;
V(t) – поток оборотных средств, потребляемых ППО;
k – коэффициент эффективности использования оборотных средств.

Условия равновесного рынка. Используя соответствующие уравнения из системы (8) выражения потоков ОПФ и ОбФ можно записать в виде:

$$U(t)=\frac{S_U(t)}{C_U}=\frac{\beta S(t)}{C_U}=\frac{\beta y(t)C_y}{C_U}\ , \qquad V(t)=\frac{S_V(t)}{C_V}=\frac{\gamma S(t)}{C_V}=\frac{\gamma y(t)C_y}{C_V}\ . \qquad (9)$$

В случае, когда коэффициент фондоемкости $m(t)=m=$Const, подставляя (9) в уравнения ППО (7), получим:

$$\begin{cases} m\dfrac{dP(t)}{dt}=\dfrac{\beta y(t)C_y}{C_u}-\alpha P(t)\ , \\ y(t)=k\dfrac{\gamma C_y}{C_V}y(t-\tau_V)\ . \end{cases} \qquad (10)$$

В условиях стабильного (равновесного) рынка, любые возмущения внутри рынка, не должны отражаться на производственной деятельности предприятия, т.е. поток выпуска продукции должен оставаться неизменным. Получим условия стабильной работы ППО. Будем считать, что предприятие работает на полную мощность, т.е. $y(t)=P(t)=y=\text{Const}$. В этом случае, $y(t-\tau_V)=y$, и система уравнений (10) примет вид

$$\begin{cases} 0=y\left(\dfrac{\beta C_y}{C_u}-\alpha\right), \\ y=k\dfrac{\gamma C_y}{C_V}y\ , \end{cases}$$

откуда следуют условия стабильного (равновесного) рынка:

$$\begin{cases} \dfrac{\beta C_y}{C_u}-\alpha=0, \\ k\dfrac{\gamma C_y}{C_V}-1=0. \end{cases} \qquad (11)$$

При изменении экзогенных рыночных факторов (например, изменения цен на производственные фонды C_U и C_V,), из условий (11) можно определить значения управляемых эндогенных параметров (например, цену своей продукции C_y, величины долей β и γ), которые обеспечат стабильную работу предприятия в рамках рассмотренной модели.

Предположим, что на рынке произошло резкое повышение цены на основные производственные фонды. Новая цена C_u' стала равной

$$C_u' = q\, C_u\,, \quad q>1\ . \tag{12}$$

Предположим также, что остальные параметры и условия сохранились на рынке неизменными. Примем, что предприятие работает на полную мощность, т.е. $y \equiv P$.

При этом решение уравнения (7) будет

$$y = y_0 \exp\left[\left(1 - q\right)\alpha\, t \big/ qm\right], \tag{13}$$

откуда следует, что при $t \to \infty$ выпуск продукции $y \to 0$. В результате производственный объект прекращает свое существование. Для предотвращения этого необходимо предпринять некоторые меры. Рассмотрим два варианта действий по предотвращению краха предприятия.

Первый вариант. Повышение цены продаваемой продукции

Вместо цены C_y назначаем новую цену $C_y' > C_y$, значение которой определим далее. При новой цене сможем приобрести ОПФ в количестве

$$U' = \beta\, C_y'\, y / C_u'. \tag{14}$$

Для компенсации выбывающих ОПФ αy необходимо выполнение равенства

$$U' = U = \beta\, C_y\, y / C_u\ . \tag{15}$$

Приравнивая (14) и (15) с учетом (12) получим значение для новой цены C_y' продукции предприятия:

$$C_y' = q\, C_y\ . \tag{16}$$

Определим новую долю γ' затрат на приобретение оборотных средств. Из равенства $V = V'$ количества оборотных средств, приобретаемых из денег, вырученных при продаже произведенной продукции в количестве $y(t)$ по старой ($V=\gamma\, C_y\, y(t)/ C_v$) и новой ценам ($V'=\gamma'\, C_y'\, y(t)/ C_y$), получим соотношения

$$\gamma\, C_y\, y(t)/ C_v = \gamma'\, C_y'\, y(t)/ C_v\ . \tag{17}$$

Из (17) следует, что

$$\gamma' = \gamma / q\,, \tag{18}$$

т.е., долю затрат на оборотные средства необходимо уменьшить в q раз. Так как в этом варианте решения задачи стабилизации рынка значение β не меняется ($\beta' = \beta$), то из соотношения

$$\beta + \gamma' + \delta' = 1 \tag{19}$$

получим, что новая доля отчислений δ' на непроизводственные затраты возрастает ($\delta' > \delta$).

Второй вариант. Изменение доли β затрат на приобретение основных производственных фондов

Пусть при этом цена C_y на продукцию остается неизменной. Будем увеличивать долю средств на приобретение ОПФ за счет уменьшения доли δ непроизводственных расходов.

Новое значение β' определится из условия $u' = u$ (т.е. сохранения прежнего количества приобретаемых основных производственных фондов):

$$u = \beta\, C_y\, x / C_u\,, \quad u' = \beta'\, C_y\, x / C_u'\,. \tag{20}$$

Из равенства $u' = u$ получим новое значение

$$\beta' = q\, \beta\,. \tag{21}$$

Рассмотренный вариант возможен, если новая доля непроизводственных затрат δ' удовлетворяет неравенству

$$\delta' = 1 - \beta' - \gamma \geq 0. \tag{22}$$

<u>Практическая часть.</u>

В таблице исходных данных заданы характеристики производственного объекта:

y – выпуск продукции в единицу времени;

α – коэффициент выбытия основных производственных фондов;

k – коэффициент затрат оборотных средств.

Кроме того, заданы рыночная цена на продукцию C_y и доли затрат β, γ, δ. При этих заданных величинах для стабильного установившегося режима должны выполняться равенства (11). Из них определяются цены C_u и C_υ .

На рынке происходит повышение цены на основные производственные фонды в q раз.

Требуется рассчитать финансовые результаты и принять управленческие решения для стабилизации положения предприятия по первому и второму варианту на основе экономического и маркетингового анализа ситуации.

Порядок выполнения работы.

1.Определение параметров рынка для исходного режима.

1.1. Определить выручку от реализации S из (3).

1.2. Определить затраты S_U, S_V, $S_{ост}$ из (2)

1.3. Определить цены на основные и оборотные фонды C_U и C_V из (11).

1.4.Определить потоки основных и оборотных фондов U и V в установившемся исходном режиме из (4) и (5).

2. Условия стабильной работы предприятия при изменении цены C_U на основные фонды.

Расчет по первому варианту.

2.1. Определить новые цены C_u' и C_y' из (12) и (16).

2.2. Определить новую сумму S' из (3) при новой цене C_y'.

2.3. Определить новые доли γ' и δ' из (18) и (19).

2.4. Определить новые затраты S_U', S_V' и $S_{ост}'$ из (2).

2.5. Для проверки определить U', V' из (4) и (5) подставляя C_u', S_U' и S_V'.. Полученные значения должны совпасть со значениями U и V, вычисленными в пункте 1.4.

Расчет по второму варианту.

2.6. Определить новую долю β' из (21).

2.7. Рассчитать долю δ' по (22). Проверить условие (22). Если условие не выполняется, то для принятия решения остается только первый вариант.

2.8. При выполнении условия (22) определить новые затраты S_U', S_V' и $S_{ост}'$ из (2).

2.10. Для проверки определить U', V' из (4) и (5) подставляя C_u', S_U' и S_V'.. Полученные значения должны совпасть со значениями U и V, вычисленными в пункте 1.4.

3. Выводы и рекомендации.

Сделать выводы по достоинствам и недостаткам рассмотренных вариантов и выдать рекомендации по способу стабилизации работы предприятия в условиях нестабильного рынка.

Исходные данные для выполнения работы представлены в табл.2

Варианты исходных данных

Таблица. 2

Данные	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	100	15	27	35	15	14	170	280	1800	2350
α	0.15	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2	0.2	0.15	0.11	0.12
k	1.2	1.3	1.4	1.5	1.1	0.8	0.9	0.6	1.2	1.35
β	0.4	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.45
γ	0.3	0.2	0.4	0.3	0.1	0.3	0.4	0.2	0.3	0.25
δ	0.3	0.7	0.4	0.4	0.8	0.5	0.3	0.4	0.2	0.3
C_x	130	10	25	16	105	12	10	89	35	202
q	1.1	1.2	1.3	1.4	1.15	1.25	1.35	1.05	1.3	1.45

Практическая работа № 6.

МНОГОПРОДУКТОВЫЙ ПРОСТОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ ОБЪЕКТ

Цель работы: изучение математической модели многопродуктового производственного объекта. Закрепление теоретического материала расчетом примеров определения возможностей объекта по выпуску продукции различного вида.

<u>Теоретические положения.</u>

Предприятие, выпускающее несколько видов продукции, называется многопродуктовым производственным объектом. Рассмотрим влияние на процесс производства двух факторов производства – материальных и трудовых затрат.

Рис. 1

Пусть предприятие выпускает продукцию n видов, которые обозначим A_j, j= 1,2,...,n. Количество продукции вида A_j, выпускаемой в единицу времени, обозначим через Y_j , j=1,2,...,n. Величина Y_j может измеряться в штуках, килограммах, рублях и т.д. в единицу времени.

1. Материальные затраты на производство продукции

Предположим, что всего при производстве продукции используется m видов компонент a^i (i=1,2,...,m) и каждое изделие A_j состоит из различных компонент, которые обозначим через a^i_j, i = 1,2,...,m, j = 1,2,...,n . Здесь индекс j означает принадлежность компоненты a^i к продукции (изделию) вида A_j., а индекс i означает вид компоненты a^i_j (например, материалы, энергия или более конкретно, колесо, корпус машины и т.д.). Вообще говоря, необязательно, чтобы все виды компонент a^i_j входили во все виды изделий A_j.

Количество i-го компонента, используемого для изготовления единицы j-го вида выпускаемой продукции, обозначим через m^i_{yj}. Потребное количество в единицу времени компоненты a^i_j для выпуска продукции A_j в количестве Y_j обозначим через V^i_j . Тогда

$$m^i_{yj}\ Y_j = V^i_j\ . \qquad (1)$$

Величина V_j^i (компоненты затрат при производстве изделия A_j) для каждого фиксированного значения индекса *j* представляет собой вектор с пропорциональными компонентами, т.е.

$$\frac{V_j^1}{m_{yj}^1} = \ ... \ = \frac{V_j^i}{m_{yj}^i} = \ ... \ = \frac{V_j^m}{m_{yj}^m} = Y_j \, . \qquad (2)$$

Если ресурсы объекта не соответствуют пропорции (2), то выпуск определяется наличием наиболее дефицитного вида ресурса:

$$Y_j = \min_i \left\{ \frac{V_j^i}{m_{yj}^i} \right\} , \qquad (3)$$

где V_j^i – имеющиеся на объекте ресурсы i –го вида.

2. Трудовые затраты при производстве продукции

В зависимости от вида выпускаемых изделий, применяемой технологии и используемого оборудования требуется для производства продукции в количестве Y_j требуется соответствующее количество рабочей силы различных специальностей, которые образуют вектор с пропорциональными компонентами (L_j^1 , L_j^2 ,...,L_j^p) при фиксированном j , т.е.

$$\frac{L_j^1}{m_{Lj}^1} = ... = \frac{L_j^p}{m_{Lj}^p} = ... = Y_j^i \, , \qquad p \in p_j, \qquad (4)$$

где L_j^p – численность производственного персонала p-й специальности, занятой на производстве j- го изделия;

m_{Lj}^p – норматив трудозатрат на единицу изделия A_j ;

P_j – общее число различных специальностей, необходимых при изготовлении изделия A_j.

Обычно имеются ограничения на численность персонала

$$L_j^p \le L_{j\ 0}^p \, , \qquad p = 1, 2, ..., P \, . \qquad (5)$$

Общее количество персонала обозначим через L_0.

Если трудовые ресурсы объекта не соответствуют пропорции (4), то выпуск определяется наличием наиболее дефицитного вида ресурса:

$$Y_j = \min_p \left\{ \frac{R_{jp}}{m_{Lj}^p} \right\} ,$$

где R_{jp} - имеющиеся на объекте людские ресурсы p-го вида.

Пример.

Рассмотрим пример решения задачи определения возможностей многопродуктового производственного объекта по наличию материальных и трудовых ресурсов.

Пусть на производственном участке производится ручная сборка трех видов изделий : A_1, A_2, A_3. Максимально возможное количество производственного персонала – четверо рабочих одинаковой специальности, т.е. L_0=4. Для производства изделий используются 4 вида компонент: a^1, a^2, a^3, a^4. Задано, что для производства единицы изделия A_1 требуется одна деталь a^1, одна деталь a^2, одна a^3 и три a^4, т.е.

$A_1 = \{ a_1^1, a_1^2, a_1^3, 3a_1^4 \}$.

Аналогично заданы

$A_2 = \{ a_2^1, a_2^2, 2a_2^4 \}$,

$A_3 = \{ a_3^1, a_3^4 \}$.

Пусть нормативы трудовых затрат на каждое изделие соответственно равны m_{L1} , m_{L2} , m_{L3} . Количество деталей вида a_j^i, необходимых для выпуска продукции A_j равняется V_j^i. Здесь V_j^i – затраты, которые могут измеряться в штуках, объемах, рублях в единицу времени и т. д. Затраты деталей a_j^i на производство изделия A_j в количествеY_j заданы в таблице:

Изделие A_1	Изделие A_2	Изделие A_3
$Y_1 = V_1^1$ $Y_1 = V_1^2$ $Y_1 = V_1^3$ $3Y_1 = V_1^4$	$Y_2 = V_2^1$ $Y_2 = V_2^2$ $2Y_2 = V_2^4$	$Y_3 = V_3^1$ $Y_3 = V_3^4$

(6)

Заданы ограничения на общее количество деталей по их видам:

$$\begin{cases} V^1 = V_1^1 + V_2^1 + V_3^1 \le V_{10} , \\ V^2 = V_1^2 + V_2^2 \qquad \le V_{20} , \\ V^3 = V_1^3 \qquad\qquad \le V_{30} , \\ V^4 = V_1^4 + V_2^4 + V_3^4 \le V_{40} . \end{cases} \tag{7}$$

Здесь V_{10}, V_{20}, V_{30}, V_{40} - общее количество деталей различных видов, которые имеются на складе или могут быть доставлены на склад за единицу времени.

Ограничение на численность персонала:

$$\sum_{j=1}^{3} L_j \le 4 , \tag{8}$$

где L_j – численность персонала, работающего над изготовлением j -го вида изделия, определяется из выражения

$$L_j = m_{Lj} Y_j \,.. \tag{9}$$

Соотношения (6)-(9) определяют взаимосвязь элементов производства на участке. Подставив (6) в (7), получим

$$\begin{cases} V^1 = Y_1 + Y_2 + Y_3 \le V_{10}\,, \\ V^2 = Y_1 + Y_2 \le V_{20}\,, \\ V^3 = Y_1 \le V_{30}\,, \\ V^4 = 3Y_1 + 2Y_2 + Y_3 \le V_{40}\,. \end{cases} \tag{10}$$

Чтобы определить возможности предприятия по выпуску изделий указанных видов, необходимо задаться дополнительными соотношениями. Допустим, что задана доля выпуска каждого изделия N_j в общем выпуске, т.е.

$$N_j = \frac{Y_j}{\sum_{j=1}^{3} Y_j}\,, \qquad \sum_{j=1}^{3} N_j = 1\,, \qquad (j = 1, 2, 3)\,. \tag{11}$$

Пусть численные значения долей и ограничений на количество деталей равны следующим величинам:

$$N_1 = 1/2\,,\ N_2 = 3/8,\ N_3 = 1/8,$$

$$V_{10}=10,\ V_{20}=14,\ V_{30}=16,\ V_{40}=38. \tag{12}$$

Определим программы выпуска каждого вида изделия, расход деталей на каждый вид и потребное количество рабочего персонала.

Обозначим через Y суммарный выпуск продукции с учетом всех видов изделий, который определяется соотношением

$$Y = \sum_{j=1}^{3} Y_j\,. \tag{13}$$

Тогда из (11) и (13) следует, что $Y_j = N_j\,Y$. Подставляя это выражение в (10), получим:

$$\begin{cases} Y \le V_{10}\,, \\ Y(N_1 + N_2) \le V_{20}\,, \\ Y\,N_1 \le V_{30}\,, \\ Y(3N_1 + 2N_2 + N_3) \le V_{40}\,. \end{cases}$$

Подставляя численные значения величин из (12), определим:

$$Y \le 10,\quad Y \le 16,\quad Y \le 12,\quad Y \le 16. \tag{14}$$

У<=10, Y<=16, Y<=32, Y<=16,

Таким образом, имеем решение $Y \leq 10$ системы неравенств (14), т.е. возможность выпуска предприятием указанных изделий в сумме ограничена числом 10 и это ограничение определено наличием на складе деталей первого вида (V_{10}). Пусть $Y = 10$. Тогда из (11) получим программу выпуска

Y_1=5, Y_2=3,75, Y_3=1,25.

Дробность программы выпуска означает, что за рассматриваемую единицу времени изготавливается не целое число изделий. Некоторые из них изготовлены частично. Расход каждого вида компонентов получим из (10), подставляя туда найденные значения Y_j :

$V^1 = 10$, $V^2 = 8.75$, $V^3 = 5$, $V^4 = 23.75$.

Пусть нормативы трудозатрат равны

m_{L1} =1 /5, m_{L2}=4 /15 , m_{L3}=7 /10.

Тогда потребная численность персонала по каждому виду изделия определится из соотношения (9):

$L_1 = 1$, $L_2 = 1$, $L_3 = 0,875$.

Значение потребной численности для выпуска третьего изделия дробное. Это означает, что человек, работающий на сборке третьего изделия, загружен не полностью. Таким образом, необходимое количество персонала на участке составляет три человека, при недогрузке персонала 0,125 человек или при восьми часовом рабочем дне – один час. При имеющемся ограничении на численность персонала равном четырем видно, что один из рабочих будет простаивать.

<u>Практическая часть.</u>

<u>Дано:</u> количество видов изделий n и нормы затрат компонент на изготовление единицы каждого изделия; доли выпуска Nj каждого вида изделия в общем объеме выпуска; ограничения V_{i0} на наличие компонент; ограничение L_0 на наличие персонала; нормативы трудозатрат m_{Lj}. на изготовление изделия каждого вида

<u>Определить:</u> 1. Количество изделий каждого вида Y_j, которое предприятие сможет выпустить исходя из наличия компонент.

2. Необходимую численность персонала L_j для выпуска каждого вида изделий.

Порядок решения задачи

1. Записать систему неравенств (10).
2. Определить из (10) с учетом (11) и (13) ограничение на Y.
3. Вычислить из (11) Y_j .
4. Вычислить из (10) V_i.
5. Вычислить из (9) L_j .
6. Произвести сравнение потребного и наличного L_0 количества персонала.

Варианты исходных данных

Варианты исходных данных представлены в таблицах 1 и 2.

Т а б л и ц а 1

Вариант 1

		ИЗДЕЛИЯ			
		A_1	A_2	A_3	A_4
КОМПОНЕНТЫ	a^1	2.5	1	0	3
	a^2	0	2	1	3
	a^3	1.5	4	0	0
	a^4	0.7	2	2	3
	a^5	1	0	3	4

Вариант 2

		ИЗДЕЛИЯ			
		A_1	A_2	A_3	A_4
КОМПОНЕНТЫ	a^1	0	2	1	0.4
	a^2	0	2	0	0
	a^3	0.5	10	4	0
	a^4	3.4	12	6	1
	a^5	1	0.2	1	0

		ИЗДЕЛИЯ			
		A_1	A_2	A_3	A_4
КОМПОНЕНТ	a^1	2	11	0	1
	a^2	6	0	0	19
	a^3	0	2	1	1
	a^4	1.1	2	7	3
	a^5	2	1	1	1

Ы					

Вариант 4

Вариант 3

		ИЗДЕЛИЯ			
		A_1	A_2	A_3	A_4
КОМПОНЕНТЫ	a^1	13	7	9	0
	a^2	1	5	0	1
	a^3	1.7	1	0	1
	a^4	0	4	0	10
	a^5	0	0	1	1

Вариант 5

		ИЗДЕЛИЯ			
		A_1	A_2	A_3	A_4
КОМПОНЕНТЫ	a^1	0.5	10	1	1
	a^2	0	13	2	2
	a^3	3.5	5	2	1
	a^4	3.7	0	2	3
	a^5	0	1	2	1

Вариант 6

		ИЗДЕЛИЯ			
		A_1	A_2	A_3	A_4
КОМПОНЕНТЫ	a^1	0	0	12	5
	a^2	1	1	6	2
	a^3	6.2	1	1	0
	a^4	0.1	7	11	1
	a^5	2.2	1	15	11

Вариант 7

		ИЗДЕЛИЯ			
		A_1	A_2	A_3	A_4
КОМПОНЕНТЫ	a^1	0	3	1	1
	a^2	9	4	7	6
	a^3	2.1	1	1	7
	a^4	1.3	4	6	6
	a^5	2	2	2	1

Вариант 8

		ИЗДЕЛИЯ			
		A_1	A_2	A_3	A_4
КОМПОНЕНТЫ	a^1	1.1	11	2	2
	a^2	2	0	0	1
	a^3	3	1	1	7
	a^4	5.5	1	3	2
	a^5	6	6	12	1

Вариант 9

		ИЗДЕЛИЯ			
		A_1	A_2	A_3	A_4
КОМПОНЕНТЫ	a^1	8	1	0	15
	a^2	1	2	7	4
	a^3	4	1	2	1
	a^4	0	10	8	2
	a^5	5	3	1	4

Вариант 10

		ИЗДЕЛИЯ			
		A_1	A_2	A_3	A_4
КОМПОНЕНТЫ	a^1	5	2	0	10
	a^2	1	0	8	15
	a^3	2	4	1	3
	a^4	7	2	4	5
	a^5	1	5	2	4

Таблица 2

Вари-ант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$N_{1'}$	0.12	0.5	0.6	0.5	0.1	0.33	0.25	0.7	0.1	0.45
N_2	0.28	0.1	0.1	0.23	0.16	0.33	0.2	0.15	0.2	0.35
N_3	0.2	0.15	0.1	0.17	0.4	0.14	0.25	0.05	0.3	0.15

N_4	0.4	0.25	0.2	0.1	0.34	0.2	0.3	0.1	0.4	0.05
V_{10}	15	29	31	10	43	14	25	18	64	32
V_{20}	10	42	15	26	18	14	32	12	34	28
V_{30}	23	10	18	18	56	23	34	24	56	45
V_{40}	20	30	40	10	30	50	35	20	40	55
V_{50}	22	16	19	28	33	40	21	15	35	39
m_{L1}	0.3	0.7	0.4	0.4	0.8	0.5	0.3	0.4	0.2	0.3
m_{L2}	1.5	1.2	1.4	1.7	1.1	0.6	0.4	0.8	0.7	0.9
m_{L3}	1.5	1.6	1	1.8	1.2	0.9	0.8	0.6	0.8	1.7
m_{L4}	1.1	1.2	1.3	1.4	1.15	1.25	1.35	1.05	1.3	1.45
L_0	7	10	6	6	6	9	10	6	14	18